零条件をみたす非線形項を持つ半線形波動方程式系の解の特異性伝播について*

伊藤真吾 (東京理科大学理学部数学科)

双曲型偏微分方程式には，初期値の特異性が時間の経過と共に方程式固有の法則で伝わっていくという現象がある．このことを『特異性の伝播』と呼ぶ．本講演では，次の半線形波動方程式系の解の特異性伝播を考える．

$$\begin{cases} \Box u = h_1(u,v)Q_0(u,u) + h_2(u,v)Q_0(u,v) + h_3(u,v)Q_0(v,v) + h_4(u,v)Q_1(u,v), \\ \Box v = h_5(u,v)Q_0(u,u) + h_6(u,v)Q_0(u,v) + h_7(u,v)Q_0(v,v) + h_8(u,v)Q_1(u,v), \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ \partial_t v(0,x) = v_1(x). \end{cases} \tag{0.1}$$

但し，$\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$，$u = u(t,x), v = v(t,x)$ は $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u_0(x), u_1(x), v_0(x), v_1(x)$ は $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_j(u,v)(j = 1,2,\ldots,8)$ は u と v の多項式で実数係数，$Q_0(f,g) = (\partial_t f)(\partial_t g) - (\partial_x f)(\partial_x g)$, $Q_1(f,g) = (\partial_t f)(\partial_x g) - (\partial_x f)(\partial_t g)$ とする．また，$3/2 < s \leq 2$ とし，$u_0, v_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $u_1, v_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ と仮定する．

L.Hormander[3] は，n 次元線型波動方程式 $\Box u = 0$ (ただし，$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$) の解 u の波面集合 WF(u) は $\Box$ の零陪特性曲線 (null bicharacteristic) に沿って伝播することを示した。零陪特性曲線とは，$p(t,x,\tau,\xi)$ を微分作用素 $P(t,x,D_t,D_x)$ の特性多項式の主部としたとき，$p(t_0,x_0,\tau_0,\xi_0) = 0$ を満たす点 $(t_0,x_0,\tau_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n/\{0\})$ に対して，$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial p}{\partial \tau}(t,x,\tau,\xi)$，$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial p}{\partial \xi}(t,x,\tau,\xi)$，$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,\tau,\xi)$，$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial x}(t,x,\tau,\xi)$ かつ $t(0) = t_0$，$x(0) = x_0$，$\tau(0) = \tau_0$，$\xi(0) = \xi_0$ で定義される曲線である．このことを非線形方程式で考えた場合，一般にはこのような結果を得ることはできず，解 u は線形の場合に得られる箇所以外にも新たな特異性を持つことが知られている．しかし，解 u に仮定する特異性の条件を弱めると線形の場合と似た現象を見ることができ，それに関する様々な結果が示されている．例えば，$\Box u = F(u,Du)$, (ただし，$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$) において，その解 u に超局所ソボレフ空間の正則性 $u \in H^s \cap H^r_{ml}(t_0,x_0,\tau_0,\xi_0)$ を仮定する．このとき，s と r が適切な範囲内の値であれば，線形の場合と同様に，H^r_{ml} の特異性が点 (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) を通る零陪特性曲線に沿って伝播する．これを成立させる s と r の範囲は，J.M.Bony，M.Beals，M.Reed らによってたびたび改良されてきており，現在得られている最良の範囲は，L.Liu [7] による $n/2+1 < s < r < 3s-n-1$ である．

本研究では，非線形項に零条件 (null condition) を課すことにより，s, r についての条件を改良した．Q_0, Q_1 は一般に "零形式 (null form)" と呼ばれ，零形式によって表される非線形項を "零条件を満たす" などという．零条件は 1986 年に Klainerman によって，ある種の非線形波動方程式が時間大域解を持つための十分条件として与えられた．現在も，この零条件を改良し，その条件のもとで，時間大域解，時間局所解の存在を示す試みが多くの数学者によって研究されており，様々な結果が得られている．

定義 1 (零条件) $F(u,v)$ は原点の近傍で滑らかな実数値関数とする．ここで，変数 u, v は $I = 1,2,\ldots,p$, $i = 1,\ldots,n$ に対し，$u = (u^I)$，$v = (v_i^I)$ とし，$(u,v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{np}$ である．このとき，$F(u,v)$ が零条件 *(null condition)* を満たすとは，任意の (u,v) と $X_1^2 - \sum_{i=2}^n X_i^2 = 0$ を満たす任意の $X = (X_1, \cdots, X_n)$ と任意の I, J に対して，$\sum_{i,j=1}^n \dfrac{\partial^2 F}{\partial v_i^I \partial v_j^J} X_i X_j = 0$ が成り立つことである．

*本研究は東京理科大学理学部数学科の加藤圭一先生との共同研究に基づくものである．

定義 2 (超局所ソボレフ空間) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$*(*$\mathbb{R}^n$ 上の *distribution* 全体*)* が $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n/\{0\})$ で超局所的に H^r 級であるとは，ξ_0 の錐近傍 K と $\phi(x_0) = 1$ を満たす $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在して，

$$\langle\xi\rangle^r \chi_K(\xi)|\widehat{\phi u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

をみたすことである．これを $u \in H^r_{ml}(x_0, \xi_0)$ と書く．ただし，$\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$, $\chi_K(\xi)$ は K の特性関数である．

関数空間 X^s を

$$X^s = \left\{ f(t,x) \in \mathcal{S}' \;\middle|\; \begin{array}{l} a(t)f(t,x) \in H^s(\mathbb{R}^2) \text{ for } {}^\forall a(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ f|_{t=0} \in H^s(\mathbb{R}),\ \partial_t f|_{t=0} \in H^{s-1}(\mathbb{R}), \\ \|\langle D_x\rangle^{s-1}\Box f\|_{L^2_{t,x}} < \infty \end{array} \right\} \tag{0.2}$$

と定義する．この関数空間を用いて，(0.1) の時間局所解の存在が示される．

命題 3 (時間局所解の存在) $3/2 < s \le 2$ とする．任意の $u_0,\ v_0 \in H^s(\mathbb{R})$，$u_1,\ v_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ に対してある正定数 T があって，$(u,v) \in \{X^s \cap L^\infty([-T,T];H^s_x)\} \times \{X^s \cap L^\infty([-T,T];H^s_x)\}$ を満たす初期値問題 (0.1) の時間局所解が一意に存在する．

以上の準備の下で，$\{X^s \cap L^\infty([-T,T];H^s_x)\} \times \{X^s \cap L^\infty([-T,T];H^s_x)\}$ で構成された解の H^r_{ml} 正則性の伝播に関する次の主結果を得る．

定理 4 (特異性の伝播) $(u,v) \in \{X^s \cap L^\infty([-T,T];H^s_x)\} \times \{X^s \cap L^\infty([-T,T];H^s_x)\}$(ただし，$3/2 < s \leqq 2$) は上記命題で構成された時間局所解とし，$\Box$ の零陪特性曲線 Γ 上の点 $(0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ で $(u,v) \in H^r_{ml}(0,x_0,\tau_0,\xi_0) \times H^r_{ml}(0,x_0,\tau_0,\xi_0)$ とする．このとき，$r < 2s-1$ であるならば，$|t| < T$ なる t に対して $(u,v) \in H^r_{ml}(\Gamma) \times H^r_{ml}(\Gamma)$ が成立する．

References

[1] M. Beals, *Propagation and interaction of singularities in nonlinear hyperbolic problems*, Birkhäuser, Boston(1989).

[2] M. Beals, and M. Reed, *Propagation of singularities for hyperbolic pseudo differential operators with non-smooth coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 169-184.

[3] L. Hörmander, *On the existence and the regularity of solutions of linear psuedodifferential equations*, Enseign. Math. 17(1971), 99–163.

[4] S. Ito, *Propagation of singularities for semi-linear wave equations with nonlinearity satisfying the null condition*, *J. Hyper. Diff. Eq.* 4(2007), 197–205.

[5] S. Ito and K. Kato, *Propagation of singularities for a system of semilinear wave equations with null condition*, SUT Journal of Mathematics, No.2 (2008), To appear

[6] S. Klainerman and M. Machedon, *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem, Comm. Pure Appl. Math.* 46 (1993), 1221–1268.

[7] L. Liu, *Propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations*, Canad. J .Math. Vol. **45** (4) (1993), 835-846.

[8] J. Rauch, Singularities of solutions to semilinear wave equations, *J. Pures et Appl.* 58 (1979), 299–308.