

Multi-bump type solutions for nonlinear Schrödinger equations with steep potential wells

早稲田大学基幹理工学部数学科
田中和永

次の非線型 Schrödinger 方程式の解の存在問題を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda V(x)u = |u|^{p-1}u & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u(x) \in H^1(\mathbf{R}^N). \end{cases} \quad (*)_\lambda$$

ここで $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ ($N \geq 3$), $1 < p < \infty$ ($N = 1, 2$) とし, $V(x) \in C(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ は非負とし, $\lambda \gg 1$ は摂動パラメーターである.

ここでは $V(x)$ は次のような potential well Ω をもつと仮定する.

(V1) $\Omega = \text{int}\{x \in \mathbf{R}^N; V(x) = 0\}$ とおくと Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ非空の有界集合. さらに $V^{-1}(0) = \overline{\Omega}$.

(V2) $0 < \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^N} V(x)$.

この設定の下では, $\lambda \rightarrow \infty$ としたとき, $(*)_ \lambda$ の極限問題として次の Dirichlet 問題が現れる.

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{in } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (D)$$

すなわち, u_λ を $(*)_ \lambda$ の解で λ に依存しない定数 $M > 0$ に対して

$$\|u_\lambda\|_{H^1} \leq M$$

をみたすとすると, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき, u_λ は (D) の解 u_D に収束する (必要ならば部分列 $\lambda_n \rightarrow \infty$ をとる).

この問題は Ω が連結な場合, Bartsch, Pankov, Wang らにより研究され, least energy solution の $\lambda \rightarrow \infty$ のときの挙動, 無限個の解の存在のための条件等が比較的よくわかっている ([1, 2]). ここでは, Ω が複数個の成分をもつときの least energy solution の挙動, multi-bump type solution の存在問題を Ding-Tanaka [4], Sato-Tanaka [5] の結果を中心に述べる.

また時間が許せば, potential well が退化する場合, また Schrödinger system に対する対応する結果等についても触れたい.

References

- [1] T. Bartsch, Z.-Q. Wang, Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation, *Z. angew. Math. Phys.* 51 (2000) 366-384
- [2] T. Bartsch, A. Pankov, Z.-Q. Wang, Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well, *Commun. Contemp. Math.* 3 (2001), no. 4, 549–569.
- [3] D. Cao, E. S. Noussair, Multi-bump standing waves with a critical frequency for nonlinear Schrödinger equations, *J. Diff. Eq.* 203 (2004), 292–312.
- [4] Y. Ding, K. Tanaka, Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation, *Manuscripta Math.* 112 (2003), 109–135.
- [5] Y. Sato, K. Tanaka, Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations with steep potential wells *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), 6205–6253.