2次元全空間におけるSchrödinger-Poisson方程式の解析

眞崎 聡 (東北大・情報　特別研究員 PD)

1　序

次の Schrödinger-Poisson 方程式を考える。

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda P u, \qquad -\Delta P = |u|^2, \qquad u(0,x) = u_0(x). \tag{SP}$$

ただし $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+2}$ とし、$\lambda \in \mathbb{R}$ とする。初期値は $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ $(s > 2)$ であるとする。ここで、Poisson 方程式に対しては次の境界条件を課す:

$$\nabla P \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \quad |\nabla P| \to 0 \text{ as } |x| \to \infty, \quad P(0) = 0.$$

また、background(または doping profile) をつけず、$|u|^2$ に関する付加的な条件 (例えば [2, 5] のように neutrality やモーメントの有界性など) も一切課さない。この条件の下、P は

$$P(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \left(\log\left(\frac{|x-y|}{|y|}\right)\right)|u(t,y)|^2 dy$$

として一意に与えられる。$|y| \to \infty$ のとき、$\log|x-y|$ のみだと発散するが、$\log(|x-y|/|y|)$ であれば $O(|y|^{-1})$ となり, ゆえに $q \in (2,\infty)$ に対して $\log(|x-y|/|y|) \in L^q(\mathbb{R}^2)$ であることに注意。したがって P は $u(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $(\exists p \in (2,4))$ ならば定義が可能である。この P は直感的には,

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-i\xi}{|\xi|^2}(\mathcal{F}|u|^2)(\xi)\right](x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2}|u(y)|^2 dy$$

を P の勾配と見て, $P(0) = 0$ のもと**線積分**したものであり, 先程の $u(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $(\exists p \in (2,4))$ という条件は (Hady-Littlewood-Sobolev の不等式より) これが定義できる条件でもあることに注意する. しかし、u の空間遠方での減衰がどんなに速くても (たとえ $u \in C_0^\infty$ であったとしても)、この P は $|x| \to \infty$ のとき一般に高々log で発散する:

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{|P(x)|}{\log|x|} \le \frac{\|u\|_{L^2}^2}{2\pi}.$$

この事実が (SP) を解く上での大きな問題点になる。ひとつ例を挙げると、このことから、(SP) を積分方程式

$$u(t) = e^{i\frac{t}{2}\Delta}u_0 - i\lambda\int_0^t e^{i\frac{t-s}{2}\Delta}(Pu)(s)ds$$

のように書き直したときに、右辺第二項の被積分関数は一般にどんな Lebesgue 空間にも属しないことが分かる。したがって、3 次元以上の場合 [4] のように第二項を摂動項とみなして縮小写像の原理を用いる、という一般論を用いて解くことは難しいのではないかと思われる。今回、このような状況下においても解が得られることが分かった。

定理 1.1. $s > 2$ であるとする。このとき、任意の $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ に対してある存在時間 $T > 0$ が存在して (SP) の時間局所解 $u \in C((-T,T);H^s) \cap C^1((-T,T);H^{s-2}_{\mathrm{loc}})$ がこの空間で一意に存在する。さらに、写像 $u_0 \mapsto u$ は $H^s \to C((-T,T);H^{s-1})$ の写像として連続。

2 証明の概略

証明の鍵は、$u(t,x) = a(t,x)e^{i\phi(t,x)}$ と書いて,

$$\begin{cases} i\partial_t a + \dfrac{1}{2}\Delta a = -i\left(\nabla\phi\cdot\nabla a + \dfrac{1}{2}a\Delta\phi\right), & a(0) = u_0, \\ \partial_t\phi + \dfrac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \lambda P = 0, & \phi(0) = 0, \\ -\Delta P = |a|^2, \end{cases}$$

というシステムに直すことである。今、正の時間のみを考える。このシステムはSchrödinger 方程式の量子流体の方程式としての側面をとらえたものである。$\partial_t a$ を含む第一方程式の線型部はSchrödinger 方程式であり、非線型項は第2式の Hamilton-Jacobi 方程式に移っている。このシステムを解くことで $a \in C([0,T); H^s)$ と $\phi \in C^1([0,T) \times \mathbb{R}^2)$ が得られる。$s > 2$ という仮定はこの際に $H^{s-1} \hookrightarrow L^\infty$ $(s > 2)$ という埋め込みを用いるために現れる。

上でも注意したように $a(t) \in H^s \subset L^2 \cap L^\infty$ の下で一般に P は非有界である。このことから、ϕ も非有界になってしまうが、$u = ae^{i\phi}$ という表示からこれは問題でない。さらに ϕ の空間方向の微分の性質 (特に空間遠方での減衰) を調べることで $u \in C([0,T]; H^s)$ が分かる。ここで u_t を考えると、$\partial_t\phi$ という非有界な項が現れることから、一般に $u_t \notin H^{s-2}$ である。しかしこの事実が、非有界な非線型項をもつにも関わらず (SP) が満たされていることに対応する。

注意 2.1. 解の局所存在だけならば $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *(*$s > 1$*)* であれば十分。

注意 2.2. 長時間挙動は分かっていない。L^2-保存則とモーメントの保存則は成立するものの、考えている解のクラスで一般にエネルギーは有界ではない。実際に、もし

$$W(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\log|x|)|u(s,x)|^2 dx ds$$

という量が $(-T,T)$ で有界であるならば、$v(t,x) := u(t,x)\exp(i\frac{\lambda}{2\pi}W(t))$ とおくと、v は

$$i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = -\frac{\lambda}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}^2} (\log|x-y|)|v(y)|^2\right) v, \qquad v(0,x) = u_0(x).$$

の解であるので、

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla v(t)\|_{L^2} - \frac{\lambda}{4\pi}\iint (\log|x-y|)|v(t,y)|^2|v(t,x)|^2 dy\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2} - \frac{\lambda}{4\pi}\iint (\log|x-y|)|u(t,y)|^2|u(t,x)|^2 dy\,dx \end{aligned}$$

は *(*有界な量であって*)* 保存することがわかる。

注意 2.3. 方程式 (SP) にプランク定数に相当するパラメータ h を入れた方程式

$$ih\partial_t u^h + \frac{h^2}{2}\Delta u^h = \lambda P^h u^h, \qquad -\Delta P^h = |u^h|^2, \qquad u^h(0,x) = u_0^h(x).$$

の解 u^h に対して、*WKB* 型の近似 $u^h = e^{i\phi_0/h}(a_0 + ha_1 + \cdots + h^N a_N + o(h^N))$ $(h \to 0)$ も同様に示すことができる。しかし、3次元以上の場合 *[1, 3]* とは大きく異なり、一般には近似は空間局所的にしか成立しない。これは各 a_j *(*$j \geq 1$*)* が非有界なものになってしまうからである。これも、P が遠方で発散していることと関わっており、より具体的には*,* 上の展開で現れる a_j が一般には遠方で増大する関数になってしまう。

参考文献

[1] T. Alazard and R. Carles, *Semi-classical limit of Schrödinger–Poisson equations in space dimension* $n \geq 3$, J. Differential Equations **233** (2007), no. 1, 241–275.

[2] Anton Arnold and Francis Nier, *The two-dimensional Wigner-Poisson problem for an electron gas in the charge neutral case*, Math. Methods Appl. Sci. **14** (1991), no. 9, 595–613.

[3] R. Carles and S. Masaki, *Semiclassical analysis for Hartree equations*, Asymptotic Analysis **58** (2008), no. 4, 211–227.

[4] Thierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.

[5] P. Zhang, *Wigner measure and the semiclassical limit of Schrödinger-Poisson equations*, SIAM J. Math. Anal. **34** (2002), no. 3, 700–718 (electronic).