角度方向の正則性と Strichartz 型評価について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
加藤 淳

この講演では、波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = f,\ \partial_t u|_{t=0} = g, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解に対する Strichartz 型評価を考察する. 上の初期値問題の解は

$$u(t) = \cos[t|\nabla|]f + |\nabla|^{-1}\sin[t|\nabla|]g$$

で与えられるが、以下では簡単のため $e^{\pm it|\nabla|}$ に対する評価を述べる. $e^{\pm it|\nabla|}$ に対する Strichartz 評価は次で与えられる.

定理 1 (Strichartz 評価)**.** $n \geq 2,\ 2 \leq p \leq \infty,\ 2 \leq q < \infty$ は

$$\frac{1}{p} \leq \frac{n-1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big) \tag{1}$$

を満たすとし, $\gamma = \frac{n}{2} - \frac{1}{p} - \frac{n}{q}$ とおく. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$\|e^{\pm it|\nabla|}f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \||\nabla|^\gamma f\|_{L^2}.$$

Sterbenz は初期値の角度方向の正則性を考慮に入れることで, 条件 (1) は次のように緩められることを示した.

定理 2 (Sterbenz 5)**.** $n \geq 4,\ 2 \leq p \leq \infty,\ 2 \leq q < \infty$ は

$$\frac{n-1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big) < \frac{1}{p} < (n-1)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big) \tag{2}$$

を満たすとし, $\varepsilon > 0$ に対し

$$\gamma = \frac{n}{2} - \frac{1}{p} - \frac{n}{q}, \quad s = (1+\varepsilon)\Big\{\frac{2}{p} - (n-1)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)\Big\}$$

とおく. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$\|e^{\pm it|\nabla|}f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \||\nabla|^\gamma \langle\nabla_\omega\rangle^s f\|_{L^2}.$$

ただし, $\langle\nabla_\omega\rangle^s = (1 - \Delta_{S^{n-1}})^{s/2}$.

定理 2 において, 角度方向の滑らかさを表す指数 s の条件で $\varepsilon = 0$ とできるかどうかは未解決な問題となっている. この講演では, 定理 2 の別証明を通してその点について考察すると共に, Schrödinger 方程式に対する評価についても紹介したい.

別証明には以下の補題が用いられる.

補題 3 (黒川-肥田野 3)**.** $n \geq 2$, $1 < p < q < \infty$, $\alpha < 1/p'$, $\beta < 1/q$, $\alpha + \beta \geq 0$,

$$\mu = \alpha + \beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

とする. このとき, f が球対称ならば,

$$\||x|^{-\beta}|\nabla|^{-\mu} f\|_{L^q} \lesssim \||x|^{\alpha-(n-1)(1/p-1/q)} f\|_{L^p}.$$

補題 4 (保城 1)**.** $n \geq 2$, $1/2 < \alpha < n/2$,

$$\||x|^{-\alpha} e^{it|\nabla|} f\|_{L^2_{t,x}} \lesssim \||\nabla|^{\alpha-1/2} \langle \nabla_\omega \rangle^{-\alpha+1/2} f\|_{L^2}.$$

参考文献

[1] T. Hoshiro, J. Anal. Math. **72** (1997), 127–140.

[2] M. Keel, T. Tao, Amer. J. Math. **120** (1998), 955–980.

[3] Y. Kurokawa, K. Hidano, to appear in Illinois J. Math.

[4] S. Machihara, M. Nakamura, K. Nakanishi, T. Ozawa, JFA **219** (2005), 1–20.

[5] J. Sterbenz, IMRN (2005), 187–231.

[6] C. Wang, D. Fang, arXiv: 0802.0058 [math.AP].