連立非線形消散型波動方程式の時間大域解の臨界指数について

竹田 寛志 (東北大学大学院 理学研究科数学専攻 D3)

1. 導入

次の連立非線形消散型波動方程式の初期値問題；

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta u_j + \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} |u_k|^{p_{j,k}}, & t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m), \\ u_j(0,x) = a_j(x), \quad \partial_t u_j(0,x) = b_j(x), & x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m) \end{cases}
$$

について考える．ここで, 連立系の成分の個数 m を $m \ge 2$ とし, 非線形項の冪は $p_{j,k} > 1$ または $p_{j,k} = 0$ $(j,k = 1,2,\cdots,m)$ を満たすものとする．連立系 (1) の非線形項の冪 $\{p_{j,k}\}_{j,k=1}^{m}$ の変化に応じた, 解の大域的挙動の変化を考察する.

非線形消散型波動方程式；

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \dfrac{\partial u}{\partial t} = |u|^p, & t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = a(x), \quad \partial_t u(0,x) = b(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}
$$

に対する時間大域解の存在, 非存在を分類する非線形項の冪の閾値 (臨界指数) は, $p = 1 + \frac{2}{n}$ であることが知られている ([6]-[10], [15], [16])．すなわち, 小さい初期データに対する (2) の非線形項の冪の変化に伴う時間大域解の存在, 非存在の変化は以下の通りである.

$1 < p \le 1 + \dfrac{2}{n}$	$p > 1 + \dfrac{2}{n}$
有限時間爆発	時間大域解の存在

一方, $p = 1 + \frac{2}{n}$ は, 非線形熱方程式;

$$
(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^p, & t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = a(x) \ge 0, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}
$$

に対する臨界指数であることが証明されており ([2], [3]), (2) と (3) は, 臨界指数が一致する．連立系に対しては $m = 2$, $p_{1,1} = p_{2,2} = 0$, $p_{1,2} > 1$, $p_{2,1} > 1$ の場合に, 消散型波動方程式系と熱方程式系の臨界指数の一致が知られている ([1], [12]).

2. 主結果

主結果を述べるための記法を導入する.

<u>記法.</u> 非線形項の冪 $p_{j,k}$ で与えられる m 次正方行列 P, m 次単位行列 E_m を以下のように

定める:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,m-1} & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,m-1} & p_{2,m} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & \dots & p_{3,m-1} & p_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \dots & p_{m,m-1} & p_{m,m} \end{pmatrix}, E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{\alpha} = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ によって, 連立方程式

$$(P - E_m)\vec{\alpha} = {}^t(1, 1, \cdots 1)$$

の根を表す.
我々は, 単独方程式や, $m = 2$ の連立系に対する結果を包含する, 以下の結果を得た.

定理 1. 空間変数の次元を $n = 1, 2, 3$ とする. 十分小さい初期データ $(a_j, b_j) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le j \le m)$ に対して, 非線形項の冪が

$$\det(P - E) \neq 0,$$
$$\sum_{k=1}^{m} p_{j,k} > 1 \quad (1 \le j \le m),$$
$$0 < \alpha_j < \frac{n}{2} \quad (1 \le j \le m),$$

を満たせば, (1) には時間大域解

$$u_j(t) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1 \le j \le m)$$

が一意に存在する.

定理 1 における $\vec{\alpha}$ の仮定が成立しない場合には, 時間大域解が存在しない連立系が存在する; 連立系 (1) の特別な場合として次の連立非線形消散型波動方程式系を考える.

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = |u_m|^{p_1}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \Delta u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = |u_1|^{p_2}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad\qquad \vdots & \\ \dfrac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \Delta u_m + \dfrac{\partial u_m}{\partial t} = |u_{m-1}|^{p_m}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u_j(0, x) = a_j(x), \quad \dfrac{\partial u_j}{\partial t}(0, x) = b_j(x), & x \in \mathbb{R}^n \quad (1 \le j \le m). \end{cases}$$

定理 2. 空間変数の次元を $n \geq 1$ とする. $\max_{1\leq j\leq m} \alpha_j = \alpha_{j_0}$ とおくとき, 初期データ $(a_j, b_j) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq j \leq m)$ が,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_j(x)dx \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} b_j(x)dx \geq 0 \qquad (1 \leq j \leq k),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_{j_0-1}(x)dx > 0, \quad \text{または}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} b_{j_0-1}(x)dx > 0.$$

を満たし, 非線形項の冪に対しては $p_j > 1$ $(1 \leq j \leq m)$,

$$\alpha_{j_0} \left(= \max_{1\leq j\leq m} \alpha_j \right) \geq \frac{n}{2},$$

が成り立つとき, $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$: (4) の解は, 有限時間爆発する.

注意. 対応する非線形熱方程式系の結果は, [11], [14] によって知られている.

3. 線形評価

時間大域解の存在定理の証明において, 発展作用素の評価が基本となる. そのため, 以下の記号を導入する.

$$K_0(t)g := \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(t\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\right)\hat{g}\right], \quad K_1(t)g := \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{t}{2}}\frac{\sin\left(t\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\right)}{\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}}\hat{g}\right],$$

$$W_0(t)g := \mathcal{F}^{-1}\left[\cos(t|\xi|)\hat{g}\right], \quad W_1(t)g := \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{g}\right],$$

ここで, $\hat{g}$ は, g の Fourier 変換, $\mathcal{F}^{-1}[g]$ は g の逆 Fourier 変換とする. $K_0(t)$, $K_1(t)$ は, 消散型波動方程式の発展作用素であって,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = a(x), \quad \partial_t u(0,x) = b(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解 $u(t)$ は

$$u(t) = K_0(t)a + K_1(t)\left(\frac{1}{2}a + b\right)$$

を満たす. 同様に, $W_0(t)$ 及び $W_1(t)$ は, 波動方程式の発展作用素であって

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = a(x), \quad \partial_t u(0,x) = b(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解 $u(t)$ は

$$u(t) = W_0(t)a + W_1(t)b$$

を満たす.
波動方程式の発展作用素には, 次の L^p-L^p 型評価が成り立つ.

補題 3. $n=1,\,2,\,3$ のとき, $1 \le r \le \infty$ に対して, ある定数 $C>0$ が存在して

$$\|W(t)g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le C|t|\|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \quad t \ne 0,$$
$$\|\partial_t W(t)g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le C|t|\|g\|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^n)}, \quad t \ne 0$$

が成り立つ.

次の補題は, 消散型波動方程式の発展作用素と波動方程式の発展作用素の関係性を示す.

補題 4 ([10], [8], [9], [7], [13])**.** $n=1,\,2,\,3$ のとき, $1 \le s \le r \le \infty$ に対して, ある $C>0$ が存在して, 以下の不等式が成り立つ;

$$\left\|\left(K_0(t) - e^{-\frac{t}{2}}\partial_t W(t) - e^{-\frac{t}{2}}\frac{t}{8}W(t)\right)g\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le C(t+1)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{r})}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}, \quad t \ge 0,$$

$$\|(K_1(t) - e^{-\frac{t}{2}}W(t))g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le C(t+1)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{r})}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}, \quad t \ge 0.$$

注意. 補題 4 は消散型波動方程式の基本解が, ある波動方程式の解を引き去ると原点における特異性がなくなり, さらに線形熱方程式と同じ減衰をすることを主張する. また, g に関する可微分性は要求されない.

References

[1] Escobedo, M., and Herrero, M., *Boundedness and blow up for a semilinear reaction diffusion system* J. Differential Equations **89** (1991), p. 176-202.

[2] Fujita, H., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I., **13** (1966), 109-124.

[3] Hayakawa, K., *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 503-505.

[4] Ogawa, T., Takeda, H., *Non-existence of weak solutions to nonlinear damped wave equations in exterior domains*, Nonlinear Analysis; Theory, Methods & Applications, **70** (2009), 3693-3701.

[5] Ogawa, T., Takeda, H., *Global existence of solutions for a system of nonlinear damped wave equations*, preprint.

[6] Hayashi, N., Kaikina, E., Naumkin, P., *Damped wave equation with super critical nonlinearities.* Differential Integral Equations **17** (2004), no. 5-6, 637-652.

[7] Hosono, T., Ogawa, T., *Large time behavior and* $L^p - L^q$ *estimate of 2-dimensional nonlinear damped wave equations*, J. Differential Equations, **203** (2004), 82-118.

[8] Marcati, P. Nishihara, K., *The* $L^p - L^q$ *estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to compressible flow through porous media*, J. Differential Equations, **191** (2003), 445-469.

[9] Narazaki, T., $L^p - L^q$ *estimates for damped wave equations and their applications to semi-linear problem*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 585-626.

[10] Nishihara, K., $L^p - L^q$ *estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z., **244** (2003), 631-649.

[11] Renclawowicz, J., *Global existence and blow-up for a completely coupled Fujita type system*, Applicationes Mathematicae, **27**, (2000), no.2, 203-218.

[12] Sun, F., Wang, M., *Existence and nonexistence of global solutions for a nonlinear hyperbolic system with damping*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, **66** (2007), no. 12, 2889-2910.

[13] Takeda, H., *Global existence and nonexistence of solutions for a system of nonlinear damped wave equations*, submitted.

[14] Umeda, N., *Blow-up and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), no. 1, 31-46.

[15] Todorova, G., Yordanov, B., *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations, **174** (2001), 464-489.

[16] Zhang, Q., *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris, **333** (2001), 109-114.