

空間非斉次性を含む双安定反応拡散方程式の遷移層をもつ解のダイナミクスについて

松澤 寛 (沼津高専)

本研究は、栄伸一郎教授 (九州大学) との共同研究に基づくものである。

1. INTRODUCTION

本講演では、次のスカラーの反応拡散方程式を考える:

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x, u), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

ここに $\varepsilon > 0$ は微小パラメータであり、非線形項 $f(x, u)$ は双安定性と呼ばれる性質を仮定する。まず、非線形項の双安定という性質について例を用いて説明しよう。

例 1. $f(x, u) \equiv f(u) = \frac{1}{2}(u - a)(1 - u^2)$. 対応する反応拡散方程式

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u)$$

において、拡散係数 ε^2 を 0 とすると、形式的に次の常微分方程式

$$(ODE) \quad \dot{u} = f(u)$$

が得られる。この常微分方程式は安定平衡点 $u = 1$, $u = -1$, 不安定平衡点 $u = a$ をもつ。このような常微分方程式の dynamics をもつ非線形項の性質をを双安定という。 $u = -1$ と $u = 1$ は対応する定常問題のエネルギーのポテンシャル $-\int_{-1}^u f(s)ds$ の 2 つの極小値を与える値ともなっている。

双安定な非線形項の場合、 $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、 Ω が $u = 1$ に近い値をとる領域と、 $u = -1$ に近い値をとる領域にわかれ、その間に遷移層 (解が -1 から 1 まで空間的に急激に値を変える部分) をもつ解がしばしば現れることが知られている。この遷移層が時間とともにどのような運動を示すか、あるいは定常解の遷移層はどのような位置に現れるかなど、さまざまな観点で研究がなされてきた。本講演では、それが非線形項に含まれる空間非斉次性により、どのような影響を受けるかという観点で行った研究である。

1.1. 空間非斉次性を含む双安定反応拡散方程式。ここでは、非線形項が双安定性をもち、さらに空間非斉次性を含む場合の既存の結果について紹介する。

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon^2 \Delta u + f(x, u) & \text{in } (0, \infty) \times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

ここに $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ である。まず、非線形項が $f(x, u) = \frac{1}{2}(u - a(x))(1 - u^2)$ である場合について既存の結果を紹介する。この非線形項は、定常問題に対応するエネルギーのポテンシャル $-\int_{-1}^u f(x, s)ds$ において、 $u = -1$ と $u = 1$ の「深さ」の大小関係が $a(x)$ の符号により変化するという性質をもち、 $a(x)$ の符号が変化するような点 x で遷移層が現れることが期待される。

Angenent, Mallet-Paret, Peletier ([1]) らは 1987 年に $N = 1$ 次元上の区間 $(0, 1)$ において定常問題 (Neumann 境界条件) を考え、 $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、 $a(x)$ の非退化零点 x_0 の近くに $u'_\varepsilon(x_0)a'(x_0) < 0$ を満たすような遷移層をもつ安定定常解を sub-supersolution の方法で構成している。また、Hale と Sakamoto([6]) らは 1988 年に同じく $N = 1$ 次元区間 $(0, 1)$ において定常問題 (Neumann 境界条件) を考え、 $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、 $a(x)$ の非退

化零点 x_0 の近くに $u'_\varepsilon(x_0)a'(x_0) < 0$ を満たす遷移層をもつ安定定常解と $u'_\varepsilon(x_0)a'(x_0) > 0$ を満たす遷移層をもつ不安定定常解を Lyapunov-Schmidt の方法で構成している.

Dancer と Yan ら ([5]) らは 2003 年に, 境界が滑らかな有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上で定常問題 (Dirichlet or Neumann 境界条件) を考えた. 彼らは, $A_\pm = \{x \in \Omega \mid \pm a(x) > 0\}$, $A_0 = \{x \in \Omega \mid a(x) = 0\}$ とおくと変分法により, 対応するエネルギーの global minimizer u_ε は $u_\varepsilon \sim 1$ on A_- , $u_\varepsilon \sim -1$ on A_+ を満たすことを示し, 集合 A_0 の近くに遷移層ができることを示した. また彼らは, $a(x)$ が球対称な関数のとき, global minimizer u_ε も球対称となることを示している. 特に, $a(x) = a(|x|)$ が $r = |x|$ の関数としてある区間 $[r_0, r_1]$ 上で 0 であり, その区間の前後で $a(r)$ が符号を変えている場合, u_ε は $r = |x|$ の関数として, 区間 $[r_0, r_1]$ の近くに遷移層をもつことになるが (Figure 1), 実際 $N \geq 2$ のときは, $r = r_0$ (つまりより原点に近いほう) の近くに遷移層ができることを示した. しかし, $N = 1$ のときは区間 $[r_0, r_1]$ のどこに遷移層ができるかについては未解決のままであった.

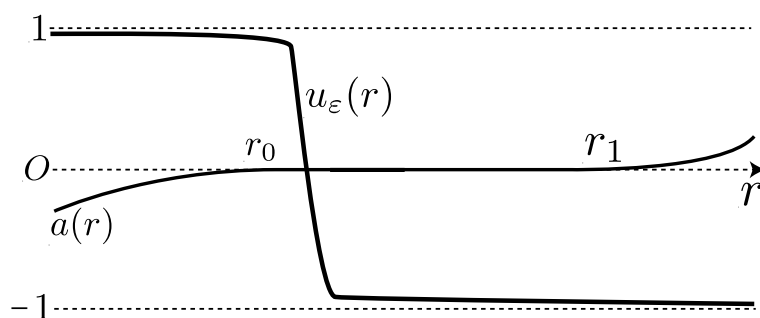


FIGURE 1

一方, 遷移層の dynamics については Fife と Hsiao([4]) らの 1988 年の研究がある. 彼らは \mathbb{R} 上で非定常問題を考え, $a(x)$ の適当な条件の下, 適当な初期値 $u_0(x)$ に対する解は, 短い時間の後に遷移層が現れ, その後の遷移層の位置 $l(t)$ は

$$\dot{l} = \varepsilon a(l)$$

に近似的に従うことを示した. この場合, $a(x)$ がある一定の区間 I で恒等的に 0 となると, その上では遷移層の dynamics を追うことができない.

次に, 非線形項が $f(x, u) = \frac{h(x)^2}{2}(u - u^3)$ である場合について既存の結果を紹介する. この非線形項は定常問題に対応するエネルギーのポテンシャル $-\int_{-1}^u f(x, s) ds$ において, $u = -1$ と $u = 1$ の「深さ」が常に等しいという性質をもち, 遷移層の出来る場所は前の例よりデリケートな問題となる. Nakashima([7]) は $N = 1$ 次元の区間 $(0, 1)$ において定常問題 (Neumann 境界条件) を考え, h の任意の非退化極小点において layer をもつ安定な解, h の任意の非退化極大点に (多重)layer をもつ不安定な解の存在を示している. しかし, やはり h が一定の区間で退化した極小値あるいは極大値をもつ場合については考察されていない.

これらの先行研究を踏まえ, 本研究では, 方程式を空間 1 次元で考え, 特に非線形項に含まれる空間非斉次性が一定の区間で退化した場合について考える.

2. 問題の設定と記号・主結果

2.1. $f(x, u)$ に対する仮定. 本講演では \mathbb{R} 上で次の問題を考える:

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

非線形項 $f(x, u)$ には以下の仮定を課す:

仮定 . (1) f は次のような形をしている

$$f(x, u) := \frac{1}{2}u(1 - u^2) + \eta a(x)g(u) = f_0(u) + \eta a(x)g(u).$$

ここで, $\eta > 0$ は小さい正の定数である.

- (2) (1) の $f_0(u)$ はもう少し一般のものでよい (本講演では $f_0(u) = \frac{1}{2}(u - u^3)$ を仮定する).
 (3) (1) の $a(x)$ は \mathbb{R} 上 有界な C^1 級の関数である. また, ある $L > 0$ があって, $I = [-L, L]$ 上で $a(x) = 0$ であり, $x = \pm L$ のまわりで次を満たす:

$$\begin{aligned} a(x) &= A_-|x + L|^{1+\alpha_-} + O(|x + L|^{2+\alpha_-}) \quad \text{as } x \rightarrow -L - 0, \\ a(x) &= A_+|x - L|^{1+\alpha_+} + O(|x - L|^{2+\alpha_+}) \quad \text{as } x \rightarrow L + 0, \end{aligned}$$

ここで, A_{\pm} は 0 でない定数, α_{\pm} は正の定数である.

- (4) g は $g(\pm 1) = 0$ を満たす.

注意 . $f_u(x, \pm 1) = -2 + \eta a(x)g'(\pm 1)$ より η を十分小さくとれば $f(x, u)$ は双安定の性質をもつ.

例 2. (1) $g(u) = -\frac{1}{2}(1 - u^2)$ とおくと, $f(x, u) = \frac{1}{2}(u - \eta a(x))(1 - u^2)$ となり, §1 で述べたように, この非線形項に対応する定常問題 Angenent, Mallet-Pallet, Peletier [1], Hale, Sakamoto [6], Dancer, Yan [5] らによって, また, 遷移層のダイナミクスは Fife, Hisao [4] らによって研究されている.

- (2) $g(u) = \frac{1}{2}u(1 - u^2)$ とおくと, $f(x, u) = (1 + \eta a(x))\frac{1}{2}u(1 - u^2)$ となり, §1 で述べたように, この非線形項に対応する定常問題は Nakashima [7] によって研究されている.

§1 であげたこれまでの研究はいずれも $a(x)$ の非退化性を課していたが, 本研究では上の仮定 (2) のように, 空間非斉次性が区間 I で退化した状況を考える. この問題において, 区間 I 上における遷移層のダイナミクスに関して研究を行った.

2.2. 近似解. 遷移層をもつ近似解を構成しよう. 問題

$$\begin{cases} \Phi'' + \frac{1}{2}\Phi(1 - \Phi^2) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ \Phi(\pm\infty) = \pm 1, \Phi(0) = 0 \end{cases}$$

の解 $\Phi(x) = \tanh(x/2)$ を用い $S(x) = \Phi(x/\varepsilon)$ とすると, S は

$$\begin{cases} \varepsilon^2 S'' + \frac{1}{2}S(1 - S^2) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ S(\pm\infty) = \pm 1, S(0) = 0 \end{cases}$$

のただ 1 つの解となる. S は次を満たす:

$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x/\varepsilon} + O(e^{-2x/\varepsilon}) & \text{as } x/\varepsilon \rightarrow \infty \\ -1 + 2e^{x/\varepsilon} + O(e^{2x/\varepsilon}) & \text{as } x/\varepsilon \rightarrow -\infty \end{cases}$$

2.3. 記号. 主結果をのべるために, 次の記号の準備を行う:

記号 . • $\mathcal{L}(x, u) = \varepsilon^2 u_{xx} + f(x, u)$

- $\delta(l) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(x, S(x - l))|$
- $I_d = [-L + d, L - d]$.
- $\mathcal{M} := \{S(x - l) : l \in I_d\}$,
- $H_0(l) := \langle \mathcal{L}(\cdot + l, S(\cdot)), S_x(\cdot) \rangle_{L^2} = \langle \eta a(\cdot + l)g(S), S_x(\cdot) \rangle_{L^2}$

補題 1. $l \in I_d$ のとき $\delta(l) = O(\varepsilon^{1+\alpha_-} e^{-(L+l)/\varepsilon} + \varepsilon^{1+\alpha_+} e^{-(L-l)/\varepsilon})$.

補題 2. ある $c_0 > 0$ があって, $l \in I_d$ に対し

$$H_0(l) := 4\eta \{A_- g'(-1)(\Gamma_- + O(\varepsilon))\varepsilon^{1+\alpha_-} e^{-2(L+l)/\varepsilon} - A_+ g'(1)(\Gamma_+ + O(\varepsilon))\varepsilon^{1+\alpha_+} e^{-2(L-l)/\varepsilon}\}$$

が成り立つ. ここで $\Gamma_{\pm} := \Gamma(2 + \alpha_{\pm})/2^{2+\alpha_{\pm}}$ である.

2.4. 主結果. 主結果は以下の通りである.

定理 A. $\eta > 0$ を十分小さくとる. このときある $\varepsilon_0 > 0$ と $C_0 > 0$ と \mathcal{M} の $H^2(\mathbb{R})$ における近傍 U があって, 次を満たす: $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ であり $u(0, \cdot) \in U$ ならば, ある関数 $l(t)$ があって, 解 $u(t, x)$ は次をみたす:

$$\|u(t, \cdot) - S(\cdot - l(t))\|_\infty \leq C_0 \delta(l(t)).$$

また, $l(t)$ は $l(t) \in I_d$ である限り次をみたす:

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\varepsilon H_0(l)}{\|\Phi\|_{L^2}^2} + O(\varepsilon \delta(l)^2).$$

ここで $\bar{H}_0(l) = 4\eta\{A_- g'(-1)\Gamma_- \varepsilon^{1+\alpha_-} e^{-2(L+l)/\varepsilon} - A_+ g'(1)\Gamma_+ \varepsilon^{1+\alpha_+} e^{-2(L-l)/\varepsilon}\}$ とおく.

定理 B. $l_\varepsilon^* \in I_d$ を $\bar{H}_0(l)$ の平衡点とする. このとき, (1) の定常解 $u^*(x)$ が存在し, 次をみたす:

$$\|u^*(\cdot) - S(\cdot - l_\varepsilon^*)\|_\infty \leq C_0 \delta(l_\varepsilon^*).$$

さらに, $\bar{H}'_0(l_\varepsilon^*) > 0$ ならば, u^* は安定, $\bar{H}'_0(l_\varepsilon^*) < 0$ ならば u^* は不安定となる. また, このとき l_ε^* は次をみたす

$$l_\varepsilon^* = \frac{\alpha_- - \alpha_+}{2} \varepsilon \log \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \log \left| \frac{A_- g'(-1)\Gamma_-}{A_+ g'(1)\Gamma_+} \right|.$$

をみたす.

u^* の layer の位置 l_ε^\dagger はある $\nu > 0$ があって

$$l_\varepsilon^\dagger = l_\varepsilon^* + O(\varepsilon^{1+\nu})$$

が成り立つ.

3. APPLICATION

例 3. $f(x, u) = \frac{1}{2}(u - \eta a(x))(1 - u^2)$ の場合 (例 2 の (1)) の場合を考えてみよう.

$$\bar{H}_0(l) = 4\eta\{-A_- \Gamma_- \varepsilon^{1+\alpha_-} e^{-2(L+l)/\varepsilon} - A_+ \Gamma_+ \varepsilon^{1+\alpha_+} e^{-2(L-l)/\varepsilon}\}$$

より, A_- , A_+ が同符号ならば, $\bar{H}_0(l)$ は定符号となり, 遷移層は I 上左に動き続けるか, 右に動き続けるかのどちらかとなる. たとえば, 下図のように $A_- > 0$, $A_+ > 0$ のとき, $\bar{H}_0(l) < 0$ であるので $\dot{l} > 0$ となり, 下図のように遷移層は右へ動き続ける.

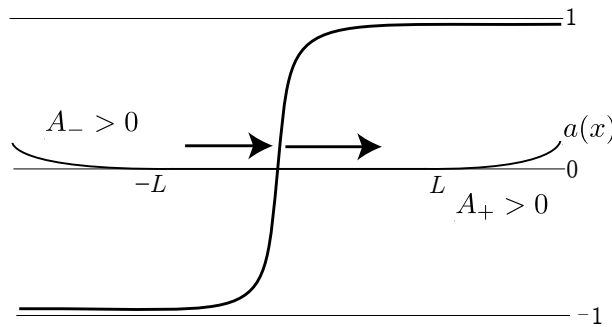


FIGURE 2

A_- と A_+ が異符号ならば $H(l)$ は平衡点 l_ε^* をもち,

$$l_\varepsilon^* = \frac{\alpha_- - \alpha_+}{2} \varepsilon \log \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \log \left(-\frac{A_- \Gamma_+}{A_+ \Gamma_-} \right)$$

を満たす. よって, $x = l_\varepsilon^*$ の近くに遷移層をもつ定常解 u^* が存在する. 以下の図のように $A_- > 0, A_+ < 0$ のとき $\overline{H}'_0(l_\varepsilon^*) > 0$ となるので, u^* は安定となり, そのまわりの遷移層のダイナミクスは以下ようになる.

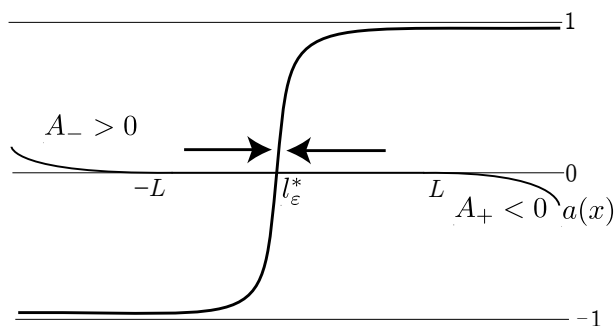


FIGURE 3

REFERENCES

- [1] S. B. Angenent, J. Mallet-Paret and L. A. Peletier, Stable transition layers in a semilinear boundary value problem, *J. Differential Equations*, 67(1987), 212–242.
- [2] S.-I. Ei, The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems, *J. Dynam. Differential Equations*, 14 (2002), no. 1, 85–137.
- [3] S.-I. Ei and H. Matsuzawa, The motion of a transition layer for a bistable reaction diffusion equation with heterogeneous environment, submitted
- [4] P. C. Fife, L. Hsiao, The generation and propagation of internal layers, *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*, 12(1988), no. 1, 19–41.
- [5] E. N. Dancer and S. Yan, Construction of various type of solutions for an elliptic problem, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 20(2004), no. 1, 93–118
- [6] J. Hale, K. Sakamoto, Existence and stability of transition layers, *Japan J. Appl. Math.*, 5(1988), no. 3, 367–405
- [7] K. Nakashima, Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation, *J. Differential Equations* 191(2003)234–276.