Stark ポテンシャルを伴った非線形 Schrödinger 方程式の時間大域解について

中村能久（熊本大学大学院 自然科学研究科)

空間3次元において, 次の Stark ポテンシャルのついた非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\dfrac{1}{2}\Delta u + V(x)u + F(u), \quad (t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \tag{NLS}$$

ここで $x \in \mathbb{R}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^{3}\partial_j^2$, $\partial_j = \partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$. 線形ポテンシャル V は次で与えられる (Stark ポテンシャル).

$$V(x) = -x_1 = E\cdot x \quad (E = (-1,0,0)), \tag{1}$$

非線形項 $F(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 \bar{u}^3$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, である.

近年, ボーズ-アインシュタイン凝縮の発見に伴い, 線形ポテンシャル効果の入った非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) の研究が盛んになってきている. 興味深い事にポテンシャル効果の入ったNLS の解はポテンシャル効果の入ってない NLS の解と異なる性質を示す事がある. 例えば反撥型調和振動子ポテンシャル ($V(x) = c|x|^2$, $c < 0$) の場合, その効果により $V \equiv 0$ の場合には爆発が起こってしまう非線形項に対して時間大域解が存在したり, 長距離散乱理論が必要な非線形項に対して短距離散乱理論が適用可能になる等である (例えば [2, 3] 参照). ここでは $V(x)$ が空間に関して線形の場合 (1) を扱う. 線形散乱理論においては次の定理に基づき様々な結果が知られている (例えば [1, 15] 参照).

定理 A (Avron and Herbst[1]) $H_E = -\frac{1}{2}\Delta - x_1$ とする. $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$\begin{aligned} e^{-itH_E}f &= U_E(t)f \\ &= e^{-\frac{it^3}{6}} e^{itx_1} e^{\frac{t^2}{2}E\cdot\nabla} e^{-itH_0} f, \end{aligned}$$

ここで $g \in L^2$, $a \in \mathbb{R}^3$ に対して $e^{a\cdot\nabla}g(x) = g(x+a)$, また $H_0 = (-1/2)\Delta$ である.

Avron-Herbst の公式を (NLS) に適用すると次が得られる:

$$\begin{cases} i\partial_t v + \dfrac{1}{2}\Delta v = \lambda e^{2i(\frac{t^3}{3}+tx_1)}F(v), \quad (t,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \tag{trNLS}$$

ここで具体的に $u(t,x) = e^{-\frac{it^3}{6}}e^{itx_1}v(t, x+\frac{t^2}{2}E)$ で与えられる.

(trNLS) を考察することにより (NLS) の解の存在等が示される ([4, 14] 参照). 今回得られた結果は (NLS) の初期値問題の時間大域解の存在, および解の漸近状態の存在に関してである. ($E = 0$ の場合は, 例えば [5, 6, 7, 9, 11] 参照. また終値問題に関しては, 例えば [8, 12, 14] 参照).

次の重みつきソボレフ空間を導入する. $m, s \in \mathbb{R}$ に対して,

$$H^{s,m} = \{f \in \mathcal{S}' \mid \|f\|_{s,m} = \|\langle x\rangle^m \langle i\partial\rangle^s f\|_{L^2} < \infty\},$$
$$H^s = H^{s,0} \text{ (通常のソボレフ空間)}$$

ここで $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$.

定理 1 (時間大域解, 解の漸近挙動) $u_0 \in H^4 \cap H^{3,1} \cap H^{1,2}$ を仮定する. このとき次を満足する十分小さい $\varepsilon > 0$ が存在する. $\|u_0\|_{H^4\cap H^{3,1}\cap H^{1,2}} = \varepsilon$ であるような (NLS) の時間大域解 u が一意に存在し, 次を満たす.

$$U(\cdot)U_E(-\cdot)u \in C([0,\infty); H^4 \cap H^{3,1} \cap H^{1,2}),$$
$$\sup_{t\geq 0}\{\|U_E(-t)u(t)\|_{H^4} + \|xU_E(-t)u(t)\|_{H^3} + \|x^2U_E(-t)u(t)\|_{H^1}\} < 2\varepsilon.$$

さらにこのとき $u_+ \in H^4 \cap H^{2,1} \cap H^{0,2}$ が一意に存在し, 次を満たす.

$$\sup_{t\geq 0}\langle t\rangle \|U_E(-t)u(t) - u_+\|_{H^4\cap H^{2,1}\cap H^{0,2}} < C\varepsilon^3.$$

ここで定数 $C > 1$ は ε に依存しない.

注意 1 エネルギー法を用いて証明が行われる. ゲージ不変性のない非線形項の評価が必要となる. *Avron-Herbst* の公式により, 非線形項に時間およびポテンシャルの空間方向に依存する振動が生じる. そのため初期値問題 (NLS) の一意解 u の微分及び解の重み付き評価は時間に関して増大する. しかし振動しながら増大するので, この振動に関して部分積分する事により必要な *decay* が得られ, (NLS) の大域解 u の存在が証明される.

注意 2 初期値が H^1 に属する場合の (NLS) の時間局所解は *Avron-Herbst* の公式及び *Stricharz* 評価を用いて存在を示すことができる *(*例えば [*4*] 参照*).*

注意 3 $E \equiv 0$ の場合は*,* *Stricharz* 評価により (NLS) の時間大域解の存在および漸近状態の存在が証明される*.* すなわち次の定理が成立する*.*

定理 *B* ***([10, 13])*** $E \equiv 0$, $u_0 \in H^1$ を仮定する*.* このとき次を満足する十分小さい $\varepsilon > 0$ が存在する*.* $\|u_0\|_{H^1} = \varepsilon$ であるような (NLS) の時間大域解 u が一意に存在し*,* この解 u は次を満たす*.*

$$u \in C([0,\infty); H^1) \cap L^{\frac{8}{3}}(0,\infty; L^4),$$
$$\nabla u \in L^{\frac{8}{3}}(0,\infty; L^4) \cap L^8(0,\infty; L^{\frac{12}{5}}).$$

さらにこのとき $u_+ \in H^1$ が一意に存在し*,* 次を満たす*.*

$$\|U_E(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} \to 0 \quad as \quad t \to \infty.$$

注意 4 空間 *2* 次元においては $E \neq 0$ の場合*,* 初期値が L^2 に属してかつ小さいならば *Stricharz* 評価により定理 B と同様の結果が証明される *(*例えば [*10, 13*] 参照*).*

参考文献

[1] J.E. Avron and I.W. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys., **52** (1977), 239–254.

[2] R. Carles, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), 757–772.

[3] R. Carles, *Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications*, SIAM J. Math. Anal., **35** (2003), 823–843 .

[4] R. Carles and Y. Nakamura, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential* Hokkaido Math. J., **33** (2004), 719–729.

[5] N. Hayashi, T. Mizumaschi and P.I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations, **16** (2003), 159–179.

[6] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to nonlinear Schrödinger equations and Hartree equations*, Amer. J. Math., **120** (1998), 369–389.

[7] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Large time behavior for the cubic nonlinear Schrödinger equations*, Canad. J. Math., **54** (2002), 1065–1085.

[8] N. Hayashi, P.I. Naumkin, A. Shimomura and S. Tonegawa, *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two space demension*, Electron. J. Differential Equations, **2004** (2004), 1–16.

[9] N. Hayashi, P.I. Naumkin and H. Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type*, preprint (2007).

[10] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations*, in "Schrödinger Operators", Lecture Notes in Phys., **345** (Holden, H. and Jensen, A. Eds), Springer-Verlag (1989), 218–263.

[11] Y. Kawahara, *Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Differential Integral Equations **18** (2005), 169–194.

[12] K. Moriyama, S. Tonegawa and Y. Tsutsumi, *Wave operators for the nonlinear Schrödinger equations with a nonlinearity of low degree in one or two space demension*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 983–986.

[13] M. Nakamura and T. Ozawa, *Nonlinear Schrödinger equations in the Sobolev space of critical order*, J. Funct. Anal., **155** (1998), 364–380.

[14] A. Shimomura and S. Tonegawa, *Remarks on long range scattering for nonlinear Schrödinger equations with Stark effects*, J. Math. Kyoto Univ., **45** (2005), 205–216.

[15] 塩野入和彦, *Stark* 効果を持つ *2* 体 *Schrödinger* 作用素に対する散乱理論–新たな波動作用素の導入とその存在について–, 神戸大学 修士論文 (2003).