完全非線形楕円型方程式の粘性解の弱ハルナック不等式

小池　茂昭（埼玉大学)

2008 年 3 月 8 日・熊本大学

1　序

本講演は A. Święch との共同研究 [11] である。

次の方程式の L^p-粘性優解の弱ハルナック不等式に関する結果を述べる。

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + \mu(x)|Du| = f(x) \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

ここで、$\mathcal{P}^+(D^2u)$ は後で定義する Pucci 作用素である。概ね、$-\triangle u$ と思っていてかまわない。

1 階微分の係数 μ が非有界である方程式に関しては、L^n-強解の場合には弱ハルナック不等式が $f, \mu \in L^n(\Omega)$ の場合に成立することが知られている ([7] 参照)。しかしながら、L^p-粘性解に関しては、最近の ABP 最大値原理に関する我々の結果 [10] が知られているだけである。

我々の弱ハルナック不等式の結果は、$q > n$ かつ $q \geq p > p_0$ （$p_0 \in [n/2, n)$ は Escauriaza 定数 [5]）の場合に (1) の非負 L^p-粘性優解 u に対し、

$$\|u\|_{L^r(Q_1)} \leq C\left(\inf_{Q_1} u + \|f\|_{L^p(Q_4)}\right)$$

となる u に依存しない定数 $r, C > 0$ が存在することある。

$q = 2n$ に関しては、Fok[6] で知られている (Trudinger[14] の方法による)。

この弱ハルナック不等式の応用として、局所ヘルダー評価や強最大値原理がある。

一方、同様の方法で境界での弱ハルナック原理も得られ、境界までこめたヘルダー連続性も得られる。更に、非有界領域での ABP 最大値原理や extremal 方程式の強解の存在にも応用できる。

ヘルダー連続性に関しては、$q > n$, $q \geq p \geq n$ で Sirakov[13] による弱ハルナック不等式を用いない方法もある。

2　準備

以下の議論で $C > 0$ は、与えられた条件以外には依存しない定数とする。

ここでは、$p > 1$ は少なくとも次を満たすものとする。

$$p > \frac{n}{2}$$

これは、$W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$ 関数が連続になるための条件だけでなく、$W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$ 関数が殆ど至る所で２階のテイラー展開が可能である条件でもある。

$r > 0$ と関数 $g : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に対し、$\|g\|_{L^r(U)} = \left(\int_U |g|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$ とする。誤解がない場合は $\|g\|_r$ と書く。

さて、定義を述べるために一般の完全非線形２階方程式

$$F(x, u, Du, D^2u) = f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{2}$$

を考える。ただし、$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は少なくとも開集合とする。

L^p-粘性解理論では、係数や非斉次項に可測関数を考えているので、$x \to f(x)$ や $x \to F(x, r, p, X)$ に連続性は仮定しない。

以下、関数 $F : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times S^n \to \mathbf{R}$ は、次の意味で一様楕円型とする。任意の $x \in \Omega$, $r \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}^n$, $X, Y \in S^n$ に対し

$$\mathcal{P}^-(X - Y) \le F(x, r, p, X) - F(x, r, p, Y) \le \mathcal{P}^+(X - Y)$$

が成り立つ。また、S^n は $n \times n$ 実対称行列の全体であり、S^n では通常の部分順序を考える。

また、ここでは一様楕円型定数

$$0 < \lambda \le \Lambda$$

を固定し、Pucci 極大・極小作用素 $\mathcal{P}^\pm : S^n \to \mathbf{R}$ を次のように定義する。$X \in S^n$ に対し、

$$\mathcal{P}^+(X) := \max\{-\mathrm{trace}(AX) \mid \lambda I \le A \le \Lambda I\}$$

$$\mathcal{P}^-(X) := \min\{-\mathrm{trace}(AX) \mid \lambda I \le A \le \Lambda I\}$$

【注意】・$\mathcal{P}^-$ は凹、$\mathcal{P}^+$ は凸であることが分かる。また、$\mathcal{P}^\pm(tX) = t\mathcal{P}^\pm(X)$ $(t \ge 0)$ も簡単に分かる。

・更に、定義から次の不等式がわかり、それらをうまく使えば、$\mathcal{P}^\pm$ は、$-\triangle$ と考えて大丈夫である。

$$\mathcal{P}^-(X)+\mathcal{P}^-(Y) \le \mathcal{P}^-(X+Y) \le \mathcal{P}^+(X)+\mathcal{P}^-(Y) \le \mathcal{P}^+(X+Y) \le \mathcal{P}^+(X)+\mathcal{P}^+(Y)$$

f が L^p 関数のときは、Caffarelli[2] による局所 L^p 評価が知られており、その研究を元に Caffarelli-Crandall-Kocan-Święch[4] によって、L^p 粘性解が導入された ([8]

も参照)。例えば、比較原理を中心とした通常の粘性解の技法は全く使えないことに注意しておく。
　まず、L^p-粘性解の定義を述べる。

L^p-粘性解の定義
(i) $u \in C(\Omega)$ が (2) の L^p-粘性劣解 (L^p-subsolution) とは、任意の $\phi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し、もし $u - \phi$ が $x \in \Omega$ で局所最大値を取るならば、次が成り立つこととする。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ess. \inf_{B_\varepsilon(x)} \{F(y, u(y), D\phi(y), D^2\phi(y)) - f(y)\} \leq 0$$

(ii) $u \in C(\Omega)$ が (2) の L^p-粘性優解 (L^p-supersolution) とは、任意の $\phi \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対し、もし $u - \phi$ が $x \in \Omega$ で局所最小値を取るならば、次が成り立つこととする。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ess. \sup_{B_\varepsilon(x)} \{F(y, u(y), D\phi(y), D^2\phi(y)) - f(y)\} \geq 0$$

(iii) $u \in C(\Omega)$ が (2) の L^p-粘性解 (L^p-solution) とは、u が (2) の L^p-粘性劣解かつ L^p-粘性優解であることとする。

　更に、L^p-強解の定義も述べておく。

L^p-強解の定義
(i) $u \in C(\Omega)$ が (2) の L^p-強優解 (L^p-strong subsolution) とは、$u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ であり、次が成り立つこととする。

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq f(x) \quad a.e. \text{ in } \Omega$$

(ii) $u \in C(\Omega)$ が (2) の L^p-強劣解 (L^p-strong subsolution) とは、$u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ であり、次が成り立つこととする。

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \geq f(x) \quad a.e. \text{ in } \Omega$$

(iii) $u \in C(\Omega)$ が (2) の L^p-強解 (L^p-strong solution) とは、u が (2) の L^p-強劣解かつ L^p-強優解であることとする。

【注意】・(2) の L^p-強解ならば L^p-粘性解になるのが、自然であるが自明ではない。しかし、充分一般的な F の仮定の下で成立する ([11] 参照)。よって、ここで得られる結果は当然 L^p-強解でも成り立つ。もちろん、L^p-強解の場合、$q = n$ で ABP 最大値原理が成り立つから、より強い結論が得られる。
・逆に、(2) の L^p-粘性解が $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属すれば、L^p-強解になることが期待されるが、これも自明ではない ([11] 参照)。
・Du に関して一次以上の増大度があっても上記の二つの注意は成立する。この証明のための細かい評価は、中川 [12] の結果を参照。

3 証明のあらすじ

古典的な強解に対する結果は $\mu, f \in L^n(\Omega)$ で成り立つが、主結果ではこの場合をカバーできていない。これは、ABP 型最大値原理が L^p-粘性解で知られていないことが原因である。L^p-粘性解に対する ABP 最大値原理は、主結果の p, q に対する条件でŚwięch との共同研究で得られている ([10] 参照)。

Caffarelli の補題を述べておく。

Caffarelli の補題 ([3] 参照)
Ω を滑らかな境界を持つ有界領域とし、$g \in C^\infty(\partial\Omega)$ とする。次の Dirichlet 問題の $C^2(\overline{\Omega})$ 解が存在する。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^+(D^2 u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

弱ハルナック不等式の証明の概略
$q \geq p > n$ の場合だけ考える。$n \geq p > p_0$ は [9], [10] で導入した "逐次比較関数法" を用いる。u の代わりに、充分大きな $t > 1$ をとり、$u/\{t\|f\|_p + \inf_{Q_1} u\}$ とすれば、$\inf_{Q_1} u \leq 1$ かつ、$\|f\|_p \ll 1$ と仮定してよい。すると、$\|u\|_{L^r(Q_1)} \leq C$ となる $r,\ C > 0$ を見つければよい。(実は、より弱い条件 $\inf_{Q_3} u \leq 1$ で充分。この "3" は、Calderon-Zygmmund の立方体分割の補題を使うので小さくできないが、最終的に Cabré の被覆法を使えば、あまり気にしなくて良くなる。)
分布関数の言葉に直せば、ある $\sigma > 0,\ C > 0$ に対し、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > s\}| \leq C s^{-\sigma} \quad (s > 0)$$

となっていればよい。更に、離散的に任意の自然数 k に対し、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > M^k\}| \leq \theta^k$$

となる $M > 1,\ \theta \in (0, 1)$ が存在すればよい。
$k = 1$ の時に、この評価を示せれば、立方体分割の補題と縮尺法で $k \geq 2$ でも示せるので、$k = 1$ に限って示してみる。
Q_4 は滑らかでないけど、適当に近似した領域で考えると Caffarelli の補題から次を満たす $\phi \in C^2(Q_4)$ が見つかる。
面倒だから、立方体は滑らかな境界を持つとしてしまう (領域を近似すればうまく行く)。Caffarelli の補題から、$\phi_0 \in C^2(Q_4 \setminus Q^o_{1/2})$ で、次の Dirichlet 問題の解がある。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^-(D^2 \phi_0) = 0 & \text{in } Q^o_4 \setminus Q_{1/2}, \\ \phi_0 = 0 & \text{on } \partial Q_4, \\ \phi_0 = -1 & \text{on } \partial Q_{1/2}. \end{cases}$$

ϕ_0 は古典解に対する強最大値の原理から $-\sigma := \max_{Q_3}\phi_0 < 0$ となり、$\phi = 2\sigma^{-1}\phi_0$ とおくと、$\phi(x) \le -2\ (x \in Q_3)$ を得る。ϕ を滑らかに $Q_{1/2}$ 内部に拡張したものを改めて ϕ と書けば、$\phi \in C^2(Q_4)$ は次を満たす。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^-(D^2\phi) = \xi(x) & \text{in } (Q_4)^o, \\ \operatorname{supp}\xi \subset Q_1, & \\ \phi = 0 & \text{on } \partial Q_4, \\ \phi \le -2 & \text{in } Q_3. \end{cases}$$

$w := u + \phi$ とおくと、$\mathcal{P}^\pm$ の不等式から w は次の L^p-優解になる。

$$\mathcal{P}^+(D^2 w) + \mu(x)|Dw| \ge f(x) - \mu(x)|D\phi(x)| + \xi(x) \quad \text{in } \Omega_0$$

ただし、$\Omega_0 = \{x \in Q_4^o \mid w(x) < 0\}$ である。L^p-粘性解に対する ABP 最大値原理より

$$\max_{Q_4}(-w) \le C\exp(C\|\mu\|_n)\left(\|f\|_n + \|D\phi\|_\infty\|\mu\|_{L^n(\Omega_0)} + \|\xi\|_{L^n(\Omega_0)}\right)$$

$\operatorname{supp}\xi \subset Q_1$ だから、右辺第二項の積分は Ω_0 の代わりに $\{x \in Q_1 \mid w(x) < 0\}$ としてよい。一方、$\max_{Q_4}(-w) \ge \max_{Q_3}(-u-\phi) \ge \max_{Q_3}(-u+2) \ge 1$ より、$\|\mu\|_n$ が小さければ ($\|f\|_n$ も小さいことを思い出そう)、次が分かる。

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) \le -\min_{Q_1}\phi =: M\}| \ge \delta$$

となる $\delta \in (0,1)$ が存在する。よって、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > M\}| \le \theta := 1 - \delta$$

となる。

後は、μ が小さいという仮定を Cabré の被覆法 [1] で取り除けばよい。

参考文献

[1] Cabré, X., On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **48** (1995), 539–570.

[2] Caffarelli, L. A., Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations, *Ann. Math.* **130** (1989), 189–213.

[3] Caffarelli, L. A. and X. Cabré, Fully Nonlinear Elliptic Equations, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[4] Caffarelli, L. A., M. G. Crandall, M. Kocan, and A. Święch, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), 365–397.

[5] Escauriaza, L., $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully non-linear equations, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), 413–423.

[6] Fok, P., Some maximum principles and continuity estimates for fully nonlinear elliptic equations of second order, Ph.D. Thesis, UCSB, 1996.

[7] Gilbarg, D. and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] Koike, S., A Beginer's Guide to the Theory of Viscosity Solutions, MSJ Memoirs **13** in 2004. 間違いがたくさんあるので、本を開く前に私の HP から『訂正』をダウンロードしてください。

[9] Koike, S. and A. Święch, Maximum principle and existence of L^p-viscosity solutions for fully nonlinear uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms, *Nonlinear Differential Equations Appl.*, **11** (2004), 491–509.

[10] Koike, S. and A. Święch, Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method, *Math. Ann.*, **339** (2007), 461–484.

[11] Koike, S. and A. Święch, Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, submitted.

[12] Nakagawa, K., Maximum principle for L^p-viscosity solutions of fully nonlinear equations with unbounded ingredients and superlinear growth terms, Preprint.

[13] Sirakov, B., Solvability of fully nonlinear elliptic equations with natural growth and unbounded coefficients, preprint.

[14] Trudinger, N. S., Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations, *Invent. Math.* **61** (1980), no. 1, 67–79.