LORENTZ-ZYGMUND 空間における BREZIS-MERLE 型不等式と N-LAPLACE 方程式への応用

猪奥 倫左
東北大学理学研究科 数学専攻

本講演では, 外力項 f を持つ N-Laplace 方程式の解の正則性が外力項 f の可積分性に依存してどのように変化するかについて考察する. ここで正則性とは, 解 u に対する可微分性を指すのが通常であるが, より一般化して解の可積分性の度合いや解の有界性も含めた意味で正則性を考える. $N \geq 2$ を空間次元とし, 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上で, 次の N-Laplace 方程式の非斉次境界値問題を考える.

$$\text{(N)} \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$N = 2$ の場合, 問題 (N) は 2 次元 Poisson 方程式と一致する.

外力を Lebesgue 空間 $L^p(\Omega)\,(1 < p)$ から取ったとき, 方程式 (N) の解 u は有界となることが知られている. また, 外力を $L^1(\Omega)$ から取ったとき, 方程式 (N) の解 u は一般に有界にならない. 解 u が一般に満たす正則性について, $N = 2$ のとき Brezis-Merle [2] によって, $N \geq 3$ のとき Aguilar-Peral [1] によって, それぞれ次の指数関数型可積分性が満たされることが示された.

命題 1 (Brezis-Merle の不等式 [2, 1])**.** $N \geq 2$ として, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とする. u を外力 $f \in L^1(\Omega)$ に対する方程式 (N) の解とする. このとき, 任意の $0 < \alpha < N\omega_N^{1/(N-1)}$ に対してある $C = C(\alpha, N, \Omega) > 0$ が存在して

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|f\|_{L^1}^{1/(N-1)}}\right) dx \leq C$$

が成り立つ. ここで ω_N は N 次元単位球面の表面積である.

以上のことから, 解が有界となるための外力の条件は, Lebesgue 空間の範疇では $L^1(\Omega)$ が境目であることがわかる. 外力の条件を細分化するために, 外力を取る関数空間として Lorentz-Zygmund 空間を用いる.

定義 2 (Lorentz-Zygmund 空間)**.** Lorentz-Zygmund 空間 $L\log^q L(\Omega)$ を次で定める.

$$L\log^q L(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega);\ \int_\Omega |f(x)| \Big(\log\big(e + |f(x)|\big) dx\Big)^q < \infty \right\}.$$

Ω が有界領域であることに注意すると, 定義から次の包含関係を満たす.

$$L^p(\Omega) \subset L\log^q L(\Omega) \subset L\log^r L(\Omega) \subset L^1(\Omega) \quad (q > r > 0, p > 1).$$

また, Lorentz-Zygmund 空間は適当な norm を導入することにより Banach 空間となる.

空間次元を $N = 2$ とする. このとき, 外力を Lorentz-Zygmund 空間 $L\log^1 L(\Omega)$ から選ぶとき, 解は有界となることが知られている. 一方, 空間次元を $N \geq 3$ とすると, 外力を $L\log^{N-1} L(\Omega)$ から選ぶとき, 解は一般に有界とは限らないことが Boccardo-Peral-Vazquez [3] によって示された. Boccardo らは同じ論文の中で, 外力の可積分性について狭くした空間 $L\log^{N-1+\varepsilon} L(\Omega)\,(\varepsilon > 0)$ から選ぶと解は一般に有界となることも示している. これらのことは, N-Laplace 方程式の解の正則性は外力の可積分条件を Lorentz-Zygmund 空間まで細分化して考えたとき, $N = 2$ の場合と $N \geq 3$ の場合でずれが生じることを示している.

定理 3. $N \geq 2, 0 \leq q < N-1$ とし, u を $f \in L\log^q L(\Omega)$ に対する方程式 (N) の解とする. このとき任意の $0 \leq \alpha < \beta$ に対して, ある $C = C(\alpha, q, N, \Omega) > 0$ が存在して

$$\int_\Omega \exp\left(\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|f\|_{L\log^q L}^{\frac{1}{N-1}}}\right)^{\frac{N-1}{N-1-q}}\right) dx \leq C$$

が成り立つ. ただし, ω_N は N 次元単位球面の表面積で,

$$\beta := \begin{cases} N\omega_N^{\frac{1}{N-1}}, & 0 < q \leq 1, \\ \left(q\left(1 - \dfrac{q-1}{N-2}\right)^{N-2}\right)^{\frac{1}{N-1}} N\omega_N^{\frac{1}{N-1}}, & 1 < q < N-1. \end{cases}$$

注意 3.1. この結果は, 外力を $L\log^{N-1} L(\Omega)$, $L^1(\Omega)$ から取ったときの解の正則性を補間した形になっており, 解の正則性の細分化となっている.

この細分化を用いて, 次の弱解の存在が示せる.

定理 4. $N \geq 2$ とし, 外力 $f \in L\log^{1-\frac{1}{N}} L(\Omega)$ に対して方程式 (N) の弱解が存在する.

注意 4.1. Boccardo et al. [3] によって, 外力 $f \in L\log^1 L(\Omega)$ のとき弱解が存在することが示されている. 定理 4 はこの結果の拡張となっている.

外力を選ぶ空間を $L\log^{N-1} L(\Omega)$ と $L\log^{N-1+\varepsilon} L(\Omega)\,(\varepsilon > 0)$ の補間空間から選ぶために, Lorentz-Zygmund 空間の更なる細分化 $L\log^{N-1} L\log\log^q L(\Omega)$ を定義する.

$$L\log^{N-1} L(\Omega) \subset L\log^{N-1} L\log\log^q L(\Omega) \subset L\log^{N-1+\varepsilon} L(\Omega) \quad (\varepsilon > 0, q > 0)$$

に注意する.

定理 5. $N \geq 3$, $q > 0$ とし 外力を $f \in L\log^{N-1} L\log\log^q L(\Omega)$ とする. このとき 方程式 (N) の弱解 u が存在して次が成り立つ.

(1) $0 < q < N-2$ とする. このとき, ある $\beta > 0$ が存在して 任意の $0 < \alpha < \beta$ に対して

$$\int_\Omega \exp\left(\exp\left(\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|f\|_{L(\log L)^{N-1}(\log\log L)^q}}\right)^{\frac{N-1}{N-2-q}}\right)\right) dx < \infty$$

が成り立つ.

(2) $q > N-2$ とする. このとき $u \in L^\infty(\Omega)$ が成り立つ.

注意 5.1. 外力 f の可積分性を更に細分化して $f \in L\log^{N-1} L\log\log^{N-2} L\log\log\log\cdots$ のときの解の正則性を求めることも可能である.

定理 3, 5 の証明には, Talenti [4] の球対称化の手法を用いる. 解を外力 f の球対称化関数を用いて評価し, 外力の可積分条件に吸収させることができない特異性の度合いをはかることにより証明する.

References

[1] Aguilar, J. A., Peral, I., *An a priori estimate for the N-laplacian,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **319**, No. 3 (1994), 161–166.

[2] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimentions,* Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1223–1253.

[3] Boccardo, L., Peral, I., Vazquez, J., *The N-laplacian elliptic equation: variational versus entropy solution,* J. Math. Anal. Appl., **201** (1996), 671–688.

[4] Talenti, G., *Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces,* Annali Mat. Pura Appl., **120** (1979), 159–184.

E-mail address: sa6m02@math.tohoku.ac.jp