Drift-diffusion system in the critical Hardy spaces

小川卓克 (東北大 理)

1　２次元臨界空間における drift-diffusion 方程式の可解性

２次元 drift-diffusion 方程式

$$\begin{cases} \partial_t n - \Delta n + \nabla \cdot (n \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t p - \Delta p - \nabla \cdot (p \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = \kappa(p - n), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \quad n(0,x) = n_0(x), \qquad p(0,x) = p_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

の時間局所解の存在は、熱核の半群表現と積分方程式を基礎にした縮小写像の方法で、解を構成することができることは、Kurokiba-Ogawa [22] によって論じた。同様の手法は 2 次元 Keller-Segel 系に対してもほぼ同様に考えることができる。

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = \kappa u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.2}$$

この結果においては選びうる関数空間として空間方向に $L^p(\mathbb{R}^n)$ ただし $\frac{n}{2} < p < n$ ただし $n = 2, 3$ という自由度がある。この空間で解くことは Navier-Stokes 方程式の解の存在定理とほぼ平行な議論によって得られる。また $n = 2$ の場合には、別の方法 (エネルギー法) によって 一方の臨界である $p = 2$ でも解くことができる。このことは [21] で取り扱った。特に Poisson 方程式の解の取り扱いから重み付きの L^2 空間で解く必要があることを注意する。

さて $n = 2$ の場合の他方の臨界である $p = 1$ は上記積分方程式の方法では単純には含まれない。他方、方程式 (1.1) あるいはそのより単純な形である (1.2) は 2 次元の渦度 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t \omega - \Delta \omega + u \nabla \omega = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta u = \mathrm{rot}\ \omega = \partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \quad \omega(0,x) = \mathrm{rot}\ u_0(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

と同一な Scaling 不変性を保つことがわかっている。2 次元 渦度の方程式 (1.3) の 場合には、空間の基礎空間を $L^1(\mathbb{R}^2)$ と選んで時間局所解の存在が Giga-Miyakawa-Osada [13], Giga-Kanbe [14] らによって得られている。$L^1(\mathbb{R}^2)$ はこれら方程式を不変にする scaling

$$\begin{cases} n_\lambda(t,x) = \lambda^2 n(\lambda^2 t, \lambda x) \\ p_\lambda(t,x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \\ \psi_\lambda(t,x) = \psi(\lambda^2 t, \lambda x) \end{cases}$$

において不変な空間、いわゆる臨界空間であって、こうした空間で方程式を考えることは Fujita-Kato の初期の結果に照らしてみれば重要なことであることがわかる。

まずはじめに 2 次元渦度の方程式が L^1 で可解となる方法を復習する。scaling 次元が同一の (1.1) や (1.2) に対しても同一の方法を用いることが可能であって、簡単のため、(1.2) に対して議論を行う。

２次元 Keller-Segel 系 (1.2) を熱核を用いて積分方程式に直せば、

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla(u\nabla\psi)ds$$

ここで基本 norm として $\|u\| \equiv \sup_{t\in I} t^{1-1/p}\|u(t)\|_p$ ただし $I = [0,T)$ かつ $1 < p < 2$ と選ぶ。

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_p \leq&\|e^{t\Delta}u_0\|_p + C\int_0^t |t-s|^{-(1/r-1/p)-1/2}\|u\nabla\psi\|_r ds \\
\leq&\|e^{t\Delta}u_0\|_p + C\int_0^t |t-s|^{-(1/r-1/p)-1/2}\|u(s)\|_p\|\nabla\psi\|_s ds \\
\leq&\|e^{t\Delta}u_0\|_p + C\int_0^t |t-s|^{-1/p}\|u(s)\|_p^2 ds \\
\leq&\|e^{t\Delta}u_0\|_p + C\int_0^t |t-s|^{-1/p}s^{-2(1-1/p)}ds\big(\sup_{t\in I} t^{(1-1/p)}\|u(t)\|_p\big)^2
\end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで $1/r = 1/p + 1/s$ かつ $1/s = 1/p - 1/2$ である。 従って 特に $1/r - 1/p + 1/2 = 1/p$。このとき

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{p} - \frac{1}{2} \leq 1$$

が必要なので、

$$\frac{2}{p} \leq \frac{3}{2}$$

から $4/3 \leq p$ また、 $p < 2$ をかしておく。今 $4/3 \leq p < 2$ とすると以下の積分は収束して

$$\int_0^t |t-s|^{-1/p}s^{-2(1-1/p)}ds = t^{(1-1/p)}B.$$

ここで B は beta 関数から生じる定数である。従って

$$\sup_I t^{1-1/p}\|u(t)\|_p \leq \sup_I t^{1-1/p}\|e^{t\Delta}u_0\|_p + B\big(\sup_{t\in I} t^{(1-1/p)}\|u(t)\|_p\big)^2$$

を得る。$t \to 0$ によって $\sup_I t^{1-1/p}\|e^{t\Delta}u_0\|_p$ はいくらでも小さくなりうるので (L^p が C_0^∞ を dense に含む事実を用い u_0 を C_0^∞ の関数で近似させることにより、正則性があれば $t \to 0$ に対して遅く近づくので) 上から bound を得ることができる。同様の方法で 差に対する評価することも得られる。次に解が $L^1(\mathbb{R}^2)$ に属することを示すためには、積分方程式を直接 L^1 で評価して L^1-L^1 有界

性を用いると

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_1 \le&\|e^{t\Delta}u_0\|_1 + C\int_0^t |t-s|^{-1/2}\|u\nabla\psi\|_1 ds\\ \le&\|u_0\|_1 + C\int_0^t |t-s|^{-1/2}\|u(s)\|_{4/3}\|\nabla\psi\|_4 ds\\ \le&\|u_0\|_1 + C\int_0^t |t-s|^{-1/2}\|u(s)\|_{4/3}\|u(s)\|_{4/3} ds\\ \le&\|u_0\|_1 + C\int_0^t |t-s|^{-1/2}s^{-1/2} ds\big(\sup_{t\in I} t^{1/4}\|u(t)\|_{4/3}\big)^2\end{aligned} \tag{1.5}$$

ここで

$$\|\nabla(-\Delta)^{-1}u(s)\|_4 \le C\|u(s)\|_{4/3}, \qquad \frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$$

は 2 次元の Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式である。最後の積分は収束して $B(1/2, 1/2)$ となり特に $\sup_{t\in I} t^{1/4}\|u(t)\|_{4/3}$ の一様有界性を得ているので、解は すべての時間で L^1 に含まれることがわかる。

以上の方法を差に対しても適用することで Giga-Miyakawa-Osada [13] は初期値 $L^1(\mathbb{R}^2)$ の渦度に対して解を構成した。

Proposition 1.1 (Giga-Miyakawa-Osada) $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ に対して 2 次元渦度の方程式 (1.3) の一意的な時間局所解 $\omega(t) \in C([0,T);L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C((0,T);L^p(\mathbb{R}^2)$ が存在する。

まったく同一に近い議論により

Theorem 1.2 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ に対して 2 次元 *Keller-Segel* 方程式 (1.2) の一意的な時間局所解 $u(t) \in C([0,T);L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C((0,T);L^p(\mathbb{R}^2)$ が存在する。

を得ることがわかる。従って Kurokiba-Ogawa [21] における可解性の議論は $n=2$ に関して言えば、$1 \le p \le 2$ に対して成立することがわかる。

さて 2 次元渦度方程式に対する可解性の場合には、$\omega(t)$ が最大値原理を満たすことから、その一様有界性から先見評価を得ることができて、解の時間大域存在定理を得ることができるが、Keller-Segel 系ないし Drift-diffusion 系に対しては、最大値原理が一般に成立しないために、先見評価を得るには entropy 評価を用いる必要がある。実際 Nagai-Senba-Yoshida [31], Biler [2], Nagai-Senba-Suzuki [30] らは、有界領域や全空間の場合の 2 次元の問題の時間大域存在性について entropy 汎関数：

$$\int_{\Omega|} u\log u dx - \frac{1}{2}\int_\Omega u\psi dx + \int_0^t\int_\Omega u\big|\nabla(\log u-\psi)\big|dxdt \le \int_\Omega u_0\log u_0 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega u_0\psi_0 dx$$

を用いて証明を行っている。これらは Lyapunov 関数を構成し、解の時間大域挙動を決定するには不可欠であるが、初期時刻からこれらの各項の意味をもたせるには初期条件を $L^1(\mathbb{R}^2)$ から取るだけでは不十分である。

形式的には entropy 汎関数は次のように捉えることができる。

$$\int_{\Omega|} u\log u dx - \frac{1}{2}\int_\Omega u\psi dx = \int_{\Omega|} u\log u dx - \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2$$

右辺第二項は形式的に Poisson 方程式を用いて書き直したものであるが、正値解を考えている限り、$\mathbb{R}^2$ においては、この第二項は意味をなさないことがわかる。実際 $|x| \to \infty$ において

$$\psi \simeq \log|x|^{-1}$$

と挙動することがわかるので $\nabla\psi \notin L^2(\mathbb{R}^2)$ である。この点を、drift-diffusion 方程式に対して考えるならば、解の差の平均が 0 となる特殊な状況の元で考えることにより、解決することができる。 より具体的には方程式の適切性を Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$ で考えることにより、それら entropy 汎関数に意味を持たせることが可能になる。そのためには解の存在する空間を $L^1(\mathbb{R}^2)$ から Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ と取り直す必要がある。

そのために、まず $v = n + p$ and $w = n - p$ とおいて 方程式 (1.1) を以下のように書き直す:

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \nabla \cdot (w \nabla \psi) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t w - \Delta w + \nabla \cdot (v \nabla \psi) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = -\kappa w, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \qquad v(0,x) = n_0(x) + p_0(x), \qquad w(0,x) = n_0(x) - p_0(x), \end{cases} \tag{1.6}$$

を考える。w に対しては自然に平均 0 の仮定をおくことができる。v に対しては遠方の境界条件を犠牲にして $v - \bar{v}$ ただし

$$\bar{v} = \int_{\mathbb{R}^2} v(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} v_0(x)dx$$

とおきなおして

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \nabla \cdot (w \nabla \psi) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t w - \Delta w + \alpha \bar{v} w + \nabla \cdot (v \nabla \psi) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = -\alpha w, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \qquad v(t,x) \to 0, \quad w(t,x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \\ \qquad v(0,x) = v_0 \equiv n_0(x) + p_0(x) - \overline{n_0 + p_0}, \\ \qquad w(0,x) = w_0 \equiv n_0(x) - p_0(x). \end{cases} \tag{1.7}$$

を考えることができる。この系に対して 基礎空間を $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ と選ぶことにより、時間局所解の存在を示した。

Definition. $\lambda > 0$ と $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して $\phi_\lambda = \lambda^{-2}\phi(\lambda^{-1}x)$ とおく。 このとき $0 < p < \infty$ に対して

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2); \quad \|f\|_{\mathcal{H}^p} \equiv \left\| \sup_{\lambda > 0} |\phi_\lambda * f| \right\|_p < \infty \right\}.$$

とおいてこれを Hardy 空間 と呼ぶ。

特に $p = 1$ と選んだときの、Hardy 空間 $\mathcal{H}^1$ の双対空間は 有界平均振動 (*bounded mean oscillation*)

$$BMO = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2); \|f\|_{BMO} < \infty \},$$

のクラスであることが知られている。

Theorem 1.3 (Ogawa-Shimizu[32]) $\alpha = \pm 1$ とする。初期値 $(v_0, w_0) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, に対してある時刻$T > 0$ があって *(1.7)* に対する時間一意解 (v, w) が存在して $v, w \in C([0,T); \mathcal{H}^1) \cap L^2(0,T; \dot{\mathcal{H}}^{1,1}) \cap C((0,T); \dot{\mathcal{H}}^{2,1}) \cap C^1((0,T); \mathcal{H}^1)$ を満たす。特に初期値から解への軌道写像 $(v_0, w_0) \to (v, w)$ は $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)^2 \to C([0,T); \mathcal{H}^1)^2$ への *Lipschitz* 連続となる。

Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ が方程式 (1.7) に対して臨界空間であることから、いわゆる Fujita-Kato の原理によって同様の関数空間において小さい初期値に対する時間大域解の存在も議論することができるが、この問題に関して、そうした議論は問題を本質を捉えた結果ではない。実際、drift-diffusion 型方程式であるならば、解の存在は大きな初期値に対して可能であるし、また Keller-Segel 系に対しても大域可解性のための初期値の大きさの臨界値を求めなければ問題の本質を捉えたことにはならない。これは自己相似解を捉える際にも、同様のことがいえるはずである。

$f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ であるとき次の評価が成り立つことが知られている。$f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ならば そのフーリエ変換 $\hat{f}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \le C\|f\|_{\mathcal{H}^1}^2. \tag{1.8}$$

このことから $-\Delta\psi = w$ に対して $w \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ならば、

$$\|\nabla\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi\widehat{\psi}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{w}|^2}{|\xi|^2} d\xi \le C\|w\|_{\mathcal{H}^1}^2$$

が従い、entropy 汎関数が有限になることがわかる。

2 L^1 型エネルギー不等式

Theorem の証明には、最大正則性に対する端点評価に関連する、臨界型の消散型評価を確立することが重要な役割を果たす。ここではその詳細には至らないが、以下のように解釈することもできる。熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = \phi(x). \end{cases} \tag{2.9}$$

の解に対してはエネルギー不等式

$$\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \le \|u_0\|_2^2$$

が成り立つことが良く知られている。特に線形方程式の場合には解の正則性が直ちに得られることから、上記の不等式は等式で得られる。この不等式は解の基礎空間を L^2 に選んだ際に有効であるが、解の基礎空間を L^p とした際には、同等の不等式が放物型評価として得られる。その際 $p = 1$ として選んだものに対応するのがここで述べる初期条件に対する最大正則性評価である。以下を得る。

Theorem 2.1 $e^{t\Delta}$ を熱方程式の解を与える半群、 $\phi \in \mathcal{H}^1$ とする。このとき

$$\left(\int_0^T \|\nabla e^{t\Delta}\phi\|_{\mathcal{H}^1}^2 dt\right)^{1/2} \le C\|\phi\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{2.10}$$

が成り立つ。ここで C は $T > 0$ に依存しない定数である。

Corollary 2.2 (一般化されたエネルギー不等式) $1 < \theta < \infty$ とする。u を非斉次熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = \phi(x). \end{cases} \tag{2.11}$$

の解とする。このとき

$$\|\nabla u\|_{L^2(I;\mathcal{H}^1)} \le C\left(\|\phi\|_{\mathcal{H}^1} + \||\nabla|^{-1} f\|_{L^2(I;\mathcal{H}^1)}\right).$$

ただし $I = \mathbb{R}_+$.

証明の詳細には、実補間を用いた議論が必要である。

Theorem 2.1 の証明は実補間や関数解析の様々な性質を用いているため、直感的にその評価の是非については理解しづらい. そこで Theorem 2.1 の直感的理解の補助的事実として次の Proposition があげられる:

Proposition 2.3 $e^{t\Delta}$ を熱方程式の解を与える半群、$\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ とする。このとき一般に不等式

$$\left(\int_0^T \|\nabla e^{t\Delta}\phi\|_1^2 dt\right)^{1/2} \le C\|\phi\|_1 \tag{2.12}$$

は成り立たない.

Proof of Proposition 2.3. Fourier 変換についての L^1-L^∞ 評価

$$\sup_\xi |\hat{f}(\xi)| \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$$

から $f = \nabla e^{t\Delta}\phi$ と選んで

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|\nabla e^{t\Delta}\phi\|_1^2 dt \ge& 4\pi^2 \int_0^\infty \left(\sup_\xi \left|\xi e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(\xi)\right|\right)^2 dt \\
=& 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\sup_\xi \left|\sqrt{t}\xi e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi}(\xi)\right|\right)^2 dt \\
& \text{(ここで ξ ついての sup をはずして適当なベクトル η を選べば)} \\
\ge& 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\left|\eta e^{-|\eta|^2}\right|\right)^2 |\hat{\phi}(\sqrt{t}^{-1}\eta)|^2 dt \\
\ge& C\int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\sqrt{t}^{-1}\eta)|^2}{t} dt \\
& \frac{|\eta|}{\sqrt{t}} = r,\ \text{とおいて} \qquad dt = -2\frac{|\eta|^2}{r^3}dr \text{ から} \\
=& C\int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(r\omega)|^2}{r} dr.
\end{aligned}$$

ここで $\omega = \eta/|\eta|$ なる単位ベクトルである. 両辺 $\omega \in \mathbb{S}^1$ について積分平均をとれば、

$$\int_0^\infty \|\nabla e^{t\Delta}\phi\|_1^2 dt \ge C(\eta)\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\phi}(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \tag{2.13}$$

を得る. 一般に ϕ をうまく選んで右辺 $= \infty$ とできる. (たとえば $\hat{\phi}(0) \ne 0$ とすればよい). もし ϕ の積分平均が 0 であっても一般に $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ だけでは右辺は有限になるとは限らない. ❑

以上の証明から、Proposition 2.3 が評価式 (1.8) の証明を与えることに注意する。実際 Proposition 2.3 は (1.8) を用いることなしに証明される。

Hardy 空間での可解性を得るにはもう一つ、非線形項に対する処理を行うために、こうした空間における双線形評価が必要である。以下の評価は発散が 0 となる場 (いわゆる divergence free 場) と 回転 が 0 となる場 (rotation free 場) 同士の積に対する著名な Coifman-Lions-Mayer-Semmes [8] による評価を一般化したものである。

Proposition 2.4 $\nabla w \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ かつ $\nabla\psi \in \dot{H}^1 \cap L^\infty$ とする。このとき以下の評価が成り立つ。

$$\|\nabla\cdot(w\nabla\psi)\|_{\mathcal{H}^1} \le C\big(\|w\|_2\|\Delta\psi\|_2 + \|\nabla w\|_{\mathcal{H}^1}\|\nabla\psi\|_\infty\big).$$

類似の評価は Triebel-Lizorkin space においては知られているがそれらは $f,\, g \in \dot{F}^s_{p,\sigma} \cap L^r$ が $1 < p \le \infty,\, 1 \le \sigma \le \infty$ となるときに $1/p = 1/r + 1/q$ and $s > 0$ に対して

$$\|fg\|_{\dot{F}^s_{p,\sigma}} \le C\big(\|f\|_r\|g\|_{\dot{F}^s_{q,\sigma}} + \|f\|_{\dot{F}^s_{q,\sigma}}\|g\|_r\big)$$

となるというものでその証明にはベクトル値関数の極大関数に対する L^p における用いているために $p = 1$ の場合を得ることができない。我々の評価はこの $p = 1$ の場合に対応していることが

$$\|\nabla(fg)\|_{\dot{F}^0_{1,2}} \simeq \|\nabla(fg)\|_{\mathcal{H}^1}.$$

からわかる。

References

[1] Biler, P., *Local and global solvability of some parabolic systems modeling chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. , **8** (1998), 715–743.

[2] Biler, P., *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, III*, Colloq. Math., **68** (1995), 229–239.

[3] Biler, P., Dolbeault, J., *Long time behavior of solutions to Nernst-Planck and Debye-Hünkel drift-diffusion systems*, Ann. Henri Poincaré, **1** (2000), 461–472.

[4] Biler, P., Hilhorst, D., Nadzieja, T., *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, II*, Colloq. Math. **67** (1994), 297–308.

[5] Biler, P., Nadzieja, T., *A nonlocal singular parabolic problem modeling gravitational interaction of particles*, Adv. Diff. Equations, **3** (1998), 177–197.

[6] Bony, J.-M., *Calcul symbolique et propagation des singularité pour les éuations aux déivéespartielles non linéaires.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), 209–246.

[7] Chae, D.-H. *Well-posedness of the Euler equation in the Lizorkin-Triebel space*, Comm. Pure Appl. Math., **48** (2002) .

[8] Coifman.R.,Lions P.L., Meyer Y., Semmes,S., *Compensated compactness and Hardy spaces* , J.Math. Pures Appl., **72** (1993) 247-286.

[9] Fefferman, C., Stein, E. M., *H^p spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137–193.

[10] Fujita, H., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.I, **13** (1966), 109-124.

[11] Fujita, H., Kato, T., *On Navier-Stokes initial value problem 1* , Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1964), 269-315.

[12] Giga, Y., *Solutions for semilinear Parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations **61** (1986), 186-212.

[13] Giga, Y., Miyakawa, T., Osada, H., *Two-dimensional Navier-Stokes flow with measure as initial vorticity,* Arch. Rational Mech. Anal., **104** (1988), 223-250.

[14] Giga, Y., Kambe, T., *Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation,* Comm. Math. Phys., **117** (1988), 549-568.

[15] Hayakawa, K., *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations,* Proc. Japan Acad., **49** (1973), 503-505.

[16] Herrero, M. A., Velázquez, J.J.L., *Singularity patterns in a chemotaxis model.* Math. Ann., **306** (1996), 583-623.

[17] Jüngel, A., *Qualitative behavior of solutions of a degenerate nonlinear drift-diffusion model for semiconductors*, Math. Model. Meth. Appl. Sci. **5** (1995), 497-518.

[18] Kato, T., *Strong L^p - solution of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions,* Math. Z., **187** (1984) , 471-480.

[19] Keller, E. F., Segel, L. A., Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theor. Biol., **26** (1970), 399-415.

[20] Kurokiba, M., Nagai, T., Ogawa, T., *The uniform boundedness and Threshould for the global existence of the radial solution to a drift-diffusion system,* preprint.

[21] Kurokiba, M., Ogawa, T., *Finite time blow-up of the solution for a nonlinear parabolic equation of drift-diffusion type* , Diff. Integral Equations **16** (2003), 427-452.

[22] Kurokiba, M., Ogawa, T., *L^p well posedness of the for the drift-diffusion system arising from the semiconductor device simulation*, preprint, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[23] Miyakawa, T., *Hardy spaces of solenoidal vector fields, with applications to the Navier-Stokes equations.* Kyushu J. Math. 50 (1996), no. 1, 1–64.

[24] Miyakawa, T., *Application of Hardy space techniques to the time-decay problem for incompressible Navier-Stokes flows in R^n.* Funkcial. Ekvac. 41 (1998), no. 3, 383–434.

[25] Mock, M. S., *An initial value problem from semiconductor device theory*, SIAM, J. Math. **5** (1974), 597-612.

[26] Nagai, T., *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci.Appl., **5** (1995), 581-601.

[27] Nagai, T., *Global existence of solutions to a parabolic system for chemotaxis in two space dimensions*, Nonlinear Anal. T.M.A., **30** (1997), 5381-5388.

[28] Nagai, T., *Blowup of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, to appear in J. Inequal. Appl.

[29] Nagai, T., Ogawa, T., *Brezis-Merle inequality of parabolic type and application to the global existence of the Keller-Segel equations*, work in preparation.

[30] Nagai, T., Senba, T., Suzuki, T., Chemotactic collapse in a parabolic system of mathematical biology, preprint

[31] Nagai, T., Senba, T., Yoshida, K., *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), no. 3, 411–433.

[32] Ogawa, T., Shimizu, S., *The Drift-Diffusion system in the two dimensional critical Hardy space* , submitted.

[33] Senba, T., Suzuki, T., *Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology.* Adv. Differential Equations, **6** (2001), 21-50.

[34] Triebel, H., *Theory of Function Spaces,* Birkhäuser, Basel, 1983.

[35] Yagi, A., *Norm behavior of solutions to a parabolic system of chemotaxis*, Math. Japon. **45** (1997), 241–265.

[36] Yamazaki, M., *The Navier-Stokes equations in the weak L^n spaces with time dependent external force,* Math. Ann. **317** (2000), 635-675.