L^p approach to free boundary problems of the Navier-Stokes equation

柴田良弘

早稲田大学理工学術院

e-mail address: yshibata@waseda.jp

清水扇丈*

静岡大学工学部

2008 年 4 月 1 日より静岡大学理学部

e-mail address: ssshimi@ipc.shizuoka.ac.jp

初期領域 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ と初期流速 $v_0 \in \Omega$ が与えられているとする．ここで Ω_0 は, 有界領域, チューブ, 外部領域, perturbed infinite layer, perturbed half-space のいずれかとする．このとき $t > 0$ で流体が占める領域 Ω_t と, Navier-Stokes 方程式

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v + (v \cdot \nabla) v - \operatorname{Div} S(v, \theta) = f(x,t) && \text{in } \Omega_t,\ t > 0, \\
&\operatorname{div} v = 0 && \text{in } \Omega_t,\ t > 0, \\
&S(v,\theta)\nu_t = \sigma \mathcal{H} \nu_t - p_0 \nu_t && \text{on } \Gamma_t,\ t > 0, \\
&v = 0 && \text{on } \Gamma_b,\ t > 0, \\
&v|_{t=0} = v_0 && \text{in } \Omega,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を満たす流速ベクトル $v(x,t) = {}^t(v_1, \ldots, v_n)$ と圧力 $\theta(x,t)$ $(x \in \Omega_t)$ を求める問題を考察する．但し $\partial\Omega_t = \Gamma_t \cup \Gamma_b$ とする．ここで

- ν_t is the unit outward normal to Γ_t,
- $S(v,\theta) = \mu D(v) - \theta I$ is the stress tensor,
- $D(v) = (D(v))_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$ is the deformention tensor,
- $\mathcal{H}$ is the mean curvature: $\mathcal{H}\nu_t = \Delta_{\Gamma(t)} x$,
- $\mu > 0$ is the vicsous coefficient,
- $\sigma > 0$ is the coefficient of surface tension,
- $p_0 > 0$ is the atmospheric pressure.

---

* 2008 年 2 月 9 日講演者

問題 (1) は次の特別な場合を含んでいる.

- Ω_0 が有界領域で $\Gamma_b = \emptyset$ のとき, (1) は drop 問題.

- Ω_0 が x_n が鉛直成分である perturbed infinite layer で $f(x,t) = -g_a \nabla x_n$ ($g_a > 0$ は重力加速度) のとき, (1) は ocean 問題.

- If Ω_0 が x_n が鉛直成分である perturbed half-space で $f(x,t) = -g_a \nabla x_n$, $\Gamma_b = \emptyset$ のとき, (1) は 底なし ocean 問題.

本研究では問題 (1) の時間局所一意可解性について考察する．drop 問題に対しては, Solonnikov [11, 13, 14, 15] が (1) の整合条件を満たす任意の初期値に対する時間局所一意可解性が流速について $W_2^{2+\ell,1+\ell/2}$ ($1/2 < \ell < 1$, $n = 3$) のクラスで証明している．Moglilevskiĭ-Solonnikov [3], Solonnikov [15] は時間局所一意可解性を Hölder 空間で証明している．$\sigma = 0$ の場合, 即ち表面張力を考慮に入れない場合には, 整合条件を満たす任意の初期値に対する時間局所一意可解性が Solonnikov [12], Mucha and W. Zajączkowski [4, 5] によって $W_q^{2,1}$ ($n < q < \infty$) のクラスで, 柴田-清水 [7, 8] $W_{q,p}^{2,1}$ ($2 < p < \infty$, $n < q < \infty$) のクラスで証明されている．ocean 問題に対しては, Allain [1] が 2 次元の場合, 谷 [16] が, 整合条件を満たす任意の初期値に対する時間局所一意可解性を $W_2^{2+\ell,1+\ell/2}$ ($1/2 < \ell < 1$, $n = 3$) のクラスで証明している．底なし ocean 問題に対しては, Prüss-Simonett[6] が初期 height function η_0 に対し $|\nabla \eta_0|$ が小さい時に $W_p^{2,1}$ ($p > n+2$) のクラスで証明している．

我々は, drop 問題, ocean 問題, 底なし ocean 問題を含む非圧縮性粘性流体の自由境界問題 (1) の時間局所一意可解性を, 整合条件を満たす任意の初期値に対して, $W_{q,p}^{2,1}$ ($2 < p < \infty$, $n < q < \infty$) のクラスで成立することを報告する．

以後 $\Omega = \Omega_0$, $\Gamma = \Gamma_0$ とする．境界上の流体粒子は常に境界上にあり, また領域内部から境界上に流体粒子が発生することがないことを仮定する．$u(\xi,t)$ を Lagrange 座標での流速ベクトルとすると，Euler 座標と Lagrange 座標は

$$x = \xi + \int_0^t u(\xi,\tau)\,d\tau = X_u(\xi,t) \tag{2}$$

で関係づけられる．$f(x,t) = -g_a \nabla x_n$ とした (1) を Lagrange 座標に変換すると次の方程式となる:

$$\begin{aligned}
&\partial_t u - \operatorname{Div} S(u,\pi) = \operatorname{Div} Q(u) + R(\pi) && \text{in } \Omega,\ t>0,\\
&\operatorname{div} u = E(u) = \operatorname{div}\tilde{E}(u) && \text{in } \Omega,\ t>0,\\
&(S(u,\pi) + Q(u))\nu_{tu} - \sigma\mathcal{H}\nu_{tu} = 0 && \text{on } \Gamma,\ t>0,\\
&u = 0 && \text{on } \Gamma_b,\ t>0,\\
&u|_{t=0} = u_0(\xi) && \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで $\theta(X_u(\xi,t),t) = \pi(\xi,t)$, $u_0(\xi) = v_0(x)$ とおいた．$\nu_{tu} = {}^tA^{-1}\nu_0/|{}^tA^{-1}\nu_0|$ で A は (2) の

Jacobi 行列

$$a_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = \delta_{jk} + \int_0^t \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}\, d\tau$$

を成分とする行列である. $Q(u)$, $R(\pi)$, $E(u)$ $\tilde{E}(u)$ は $V_j(0) = 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ を満たす多項式で与えられる非線形項である:

$$Q(u) = \mu V_1(\int_0^t \nabla u\, d\tau)\nabla u, \quad R(\pi) = V_2(\int_0^t \nabla u\, d\tau)\nabla \pi,$$
$$E(u) = V_3(\int_0^t \nabla u\, d\tau)\nabla u, \quad \tilde{E}(u) = V_4(\int_0^t \nabla u\, d\tau)u.$$

次が主結果である.

Theorem 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を, 有界領域, チューブ, 外部領域, perturbed infinite layer, perturbed half-space のいずれかとする. $\Gamma \in W_q^3$, $\Gamma_b \in W_q^2$ とする. $2 < p < \infty$, $n < q < \infty$, $2(1 - 1/p) > 1 + 1/q$ とする. 整合条件:

$$\mathrm{div}\, u_0 = 0 \quad \text{in } \Omega,$$
$$D(u_0) - (D(u_0)\nu_0, \nu_0)\nu_0 = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad u = 0 \quad \text{on } \Gamma_b$$

を満たす

$$u_0 \in B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)^n = [L_q(\Omega), W_q^2(\Omega)]_{1-1/p,p}^n$$

に対し, $T > 0$ が存在して (3) の一意解

$$u \in L_p((0,T), W_q^2(\Omega))^n \cap W_p^1((0,T), L_q(\Omega))^n, \quad \pi \in L_p((0,T), \hat{W}_q^1(\Omega))$$

が存在する. さらに $\bar{\pi}|_\Gamma = \pi|_\Gamma$ である

$$\bar{\pi} \in H_p^{1/2}((0,T), L_q(\Omega)) \cap L_p((0,T), W_q^1(\Omega))$$

が存在する.

Remark 2. 指数 p, q の制限は以下の理由による.

- $2 < p < \infty$
  埋め込み関係式

  $$W_q^1((0,T), L_q(\Omega)) \cap L_p((0,T), W_q^2(\Omega)) \subset BUC\left((0,T), [L_q(\Omega), W_q^2(\Omega)]_{1-1/p,p}\right)$$

  (e.g. Amann [2]) が成立する. ここで $[L_q(\Omega), W_q^2(\Omega)]_{1-1/p,p} = B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)$. $2 < p < \infty$ ならば $B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega) \subset W_q^1(\Omega)$ となり

  $$W_q^1((0,T), L_q(\Omega)) \cap L_p((0,T), W_q^2(\Omega)) \subset BUC\left((0,T), W_q^1(\Omega)\right)$$

  を得る. 非線形項の評価でこの関係式を用いる.

- $n < q < \infty \Rightarrow$
$$W_q^1(\Omega) \subset L_\infty(\Omega).$$
- $2(1-1/p) > 1+1/q \quad \Rightarrow$
$$\text{トレース}\quad D(u_0) - (D(u_0)\nu_0, \nu_0)\nu_0|_\Gamma \quad \text{が存在する}.$$

境界 Γ で新しい関数 η を導入し, 次を (3) の線形化問題とする:

$$\begin{aligned}
&\partial_t u - \mu\Delta u + \nabla\pi = f && x \in \Omega,\ t > 0,\\
&\operatorname{div} u = f_d = \operatorname{div} \tilde{f}_d && x \in \Omega,\ t > 0,\\
&\partial_t \eta - \nu_0 \cdot u = d && x \in \Gamma,\ t > 0,\\
&S(u,\pi)\nu_0 - \sigma(m - \Delta_\Gamma)\eta\, \nu_0 = h && x \in \Gamma,\ t > 0,\\
&u = 0 && x \in \Gamma_b,\ t > 0,\\
&u|_{t=0} = 0,\ \eta|_{t=0} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

但し m は Γ に依存する十分大きな数. Theorem 1 は, 次の (4) に対する L_p-L_q 最大正則性定理に基づき縮小写像の原理によって証明される.

Theorem 3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を, 有界領域, チューブ, 外部領域, perturbed infinite layer, perturbed half-space のいずれかとする. $\Gamma \in W_q^3$, $\Gamma_b \in W_q^2$ とする. $1 < p < \infty$, $n - 1 < q < \infty$ ($n \geqq 3$ のとき), $2 \leqq q < \infty$ ($n = 2$ のとき) とする. 整合条件:

$$\tilde{f}_d|_{t=0} = 0,\ \ h|_{t=0} = 0,$$

を満たす

$$f \in L_p((0,T), L_q(\Omega))^n,\ \ f_d \in L_p((0,T), W_q^1(\Omega)),\ \ \tilde{f}_d \in W_p^1((0,T), L_q(\Omega))^n,$$
$$d \in L_p((0,T), W_q^{2-(1/q)}(\Gamma)),\ \ h \in H_p^{1/2}((0,T), L_q(\Omega))^n \cap L_p((0,T), W_q^1(\Omega))^n$$

に対して (4) は一意解 (u, π, η)

$$u \in W_q^1((0,T), L_q(\Omega))^n \cap L_p((0,T), W_q^2(\Omega))^n, \quad \pi \in L_p((0,T), \hat{W}_q^1(\Omega)),$$
$$\eta \in W_p^1((0,T), W_q^{2-1/q}(\Gamma)) \cap L_p((0,T), W_q^{3-1/q}(\Gamma)).$$

を持つ. さらに $\bar{\pi}|_\Gamma = \pi|_\Gamma$ である

$$\bar{\pi} \in H_p^{1/2}((0,T), L_q(\Omega)) \cap L_p((0,T), W_q^1(\Omega)).$$

が存在する.

参考文献

[1] G. Allain, *Small-time existence for the Navier-Stokes equations with a free surface*, Appl. Math. Optim., **16** (1987) 37–50.

[2] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems Vol. I Abstract Linear Theory*, Monographs in Math., Vol 89, 1995, Birkhäuser Verlag, Basel·Boston·Berlin

[3] I. Sh. Mogilevskiĭ and V. A. Solonnikov, *On the solvability of a free boundary problem for the Navier-Stokes equations in the Hölder spaces of functions*, Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of Giovanni Prodi, Quaderni, Pisa (1991) 257–272.

[4] P. B. Mucha and W. Zajączkowski, *On the existence for the Cauchy-Neumann problem for the Stokes system in the L_p-framework*, Studia Mathematica, **143** (2000) 75–101.

[5] P. B. Mucha and W. Zajączkowski, *On local existence of solutions of the free boundary problem for an incompressible viscous self-gravitating fluid motion*, Applicationes Mathematicae, **27** (2000) 319–333.

[6] J. Prüss and G. Simonett, *On the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension*, preprint.

[7] Y. Shibata and S. Shimizu, *On some free boundary problem for the Navier-Stokes equations*, Differential Integral Equations, **20** (2007), 241–276.

[8] Y. Shibata and S. Shimizu, *A On the L_p-L_q maximal regularity of the Neumann problem for the Stokes equations in a bounded domain*, J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal) **615** (2008), 157–209.

[9] V. A. Solonnikov, *On the solvability of the second initial-boundary value problem for the linear nonstationary Navier-Stokes system*, Zap. Nauchn. Sem. (LOMI), **69** (1977), 1388–1424 (in Russian); English transl.: J. Soviet Math., **10** (1978) 141–193.

[10] V. A. Solonnikov, *Solvability of a problem on the motion of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **41** (1977), 1388–1424 (in Russian); English transl.: Math. USSR Izv., **11** (1977) 1323–1358.

[11] V. A. Solonnikov, *Solvability of the evolution problem for an isolated mass of a viscous incompressible capillary liquid*, Zap. Nauchn. Sem. (LOMI), **140** (1984) 179–186 (in Russian); English transl.: J. Soviet Math., **32** (1986) 223–238.

[12] V. A. Solonnikov, *On the transient motion of an isolated volume of viscous incompressible fluid*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **51** (1987) 1065–1087 (in Russian); English transl.: Math. USSR Izv., **31** (1988) 381–405.

[13] V. A. Solonnikov, *On nonstationary motion of a finite isolated mass of self-gravitating fluid*, Algebra i Analiz, **1** (1989) 207–249 (in Russian); English transl.: Leningrad Math. J., **1** (1990) 227–276.

[14] V. A. Solonnikov, *Solvability of the problem of evolution of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface on a finite time interval*, Algebra i Analiz, **3** (1991) 222–257 (in Russian); English transl.: St. Petersburg Math. J., **3** (1992) 189–220.

[15] V. A. Solonnikov, *Lectures on evolution free boundary problems: classical solutions*, L. Ambrosio et al.: LNM 1812, P.Colli and J.F.Rodrigues (Eds.), (2003) 123-175, Springer-

Verlag, Berlin, Heidelberg.

[16] A. Tani, *Small-time existence for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations with a free surface*, Arch. Rat. Mech. Anal., **133** (1996) 299–331.