HARDY 項を持つ臨界指数楕円型方程式の正値解の多重存在について

塩路直樹 (横浜国大大学院環境情報)

この講演では、次の問題の正値解の多重存在について議論する。

$$
(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u - \lambda \dfrac{u}{|x|^2} = |u|^{2^*-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

ここで、Ω は、$0 \in \Omega$ を満たす $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 4)$ の有界領域で、その境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとし、$\lambda \in (0, \overline{\lambda})$ とする。ただし、$\overline{\lambda} = ((N-2)/2)^2$ とする。

Hardy の不等式

$$
\overline{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx, \quad u \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)
$$

が成り立つことを注意しておく。

$\mathbb{R}^N$ の開集合 Ω に対して、内積 $\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx$ による $C_0^\infty(\Omega)$ の完備化を $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ と定め、

$$
I^{(\Omega,\lambda)}(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\frac{|u|^2}{|x|^2} - \frac{1}{2^*}|u^+|^{2^*} \right) dx, \quad u \in D_0^{1,2}(\Omega)
$$

と定める。$I^{(\Omega,\lambda)}$ の非自明な臨界点が、(1) の正値解に対応する。

$\lambda \in [0, \overline{\lambda})$, $(z, \varepsilon) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ に対し、

$$
u^{(\lambda)}_{(z,\varepsilon)}(x) = \frac{\left(N(N-2)\nu_\lambda^2 \varepsilon^{2\nu_\lambda}\right)^{\frac{N-2}{4}}}{|x-z|^{1-\nu_\lambda}\left(\varepsilon^{2\nu_\lambda} + |x-z|^{2\nu_\lambda}\right)^{\frac{N-2}{2}}}
$$

と置く。ただし、

$$
\nu_\lambda = \left(1 - \frac{4\lambda}{(N-2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

である。$(z,\varepsilon) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ に対し、$u^{(0)}_{(z,\varepsilon)}(x)$ は、

$$
u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N), \qquad -\Delta u = |u|^{2^*-2}u
$$

の正値解である。また、Terracini [2] は、$\lambda \in [0, \overline{\lambda})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ に対し、$u^{(\lambda)}_{(0,\varepsilon)}(x)$ は、

$$
u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad -\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = |u|^{2^*-2}u
$$

の正値解であることを示している。各 $\lambda \in [0, \overline{\lambda})$ に対して、

$$
\mathcal{S}_\lambda(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} : \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda \frac{|u|^2}{|x|^2} \right) dx = \int_\Omega |u^+|^{2^*}\, dx \right\},
$$

$$
c_\lambda = \inf\{ I^{(\Omega,\lambda)}(u) : u \in \mathcal{S}_\lambda(\Omega) \}
$$

本研究は、平野載倫氏 (横浜国大大学院環境情報) との共同研究である.

と置く。c_λ は Ω に依存しないことが知られている。$\Omega=\mathbb{R}^N$ の場合は

$$c_0 = I^{(\mathbb{R}^N,0)}(u^{(0)}_{(z,\varepsilon)}) \quad \forall z\in\mathbb{R}^N, \forall\varepsilon>0, \qquad c_\lambda = I^{(\mathbb{R}^N,\lambda)}(u^{(\lambda)}_{(0,\varepsilon)}) \quad \forall\varepsilon>0$$

のように下限が達成されるが、また、Ω が有界領域の場合は下限は達成されない。$I^{(\mathbb{R}^N,0)}$ は、nc_0 $(n\in\mathbb{N})$ で PS が崩れ、$I^{(\mathbb{R}^N,\lambda)}$ は、nc_0+mc_λ $(n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ n+m\geq 1)$ で PS が崩れることが知られている。さらに、Ω が 0 を中心とする星型有界領域の場合は、Pohozaev 型の不等式により、(1) は $\mathcal{D}^{1,2}_0(\Omega)$ に属する解を持たないことも知られている。

Ω が非可縮な場合に正値解が存在するという結果は [1] で得られているが、本講演では、正値解の多重性についての次の結果を報告する。

定理. $N\geq 4$ とする。有界領域 $\Omega(\subset\mathbb{R}^N)$ は、$0\in\Omega$ を満たし、その境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする。さらに、Ω は可縮ではないとする。このとき、十分小さい $\lambda>0$ に対して、(1) は、少なくとも $\operatorname{cat}\Omega-1$ 個の正値解を持つ。

証明には Willem [3] による相対カテゴリーを用いる。X を位相空間とし、Y を X の閉部分集合、A,B を X の部分集合とする。$Y\subset A\cap B$ が成り立ち、かつ

$$h(0,u)=u \ \ \forall u\in A, \quad h(1,u)\in B \ \ \forall u\in A, \quad h(t,Y)\subset Y \ \ \forall t\in[0,1]$$

を満たす $h\in C([0,1]\times A,X)$ が存在するとき、$A\prec_Y B \quad \text{in } X$ と定める。

X を位相空間とし、Y,A は X の部分集合で、Y は閉集合とし、$Y\subset A$ とする。次を満たす $n+1$ 個の閉集合 $A_0,A_1,\ldots,A_n$ が存在するような最小の n を $\operatorname{cat}_{X,Y}A$ と定める。

(i) $A\subset\bigcup_{i=0}^n A_i$
(ii) $A_0\prec_Y Y$ in X

$$\Big(Y\subset A_0,\ \exists\, h\in C([0,1]\times A_0,X) \text{ s.t. } h(0,u)=u,\ \forall u\in A_0,$$
$$h(1,u)\in Y\ \forall u\in A_0,\ \ h(t,Y)\subset Y\ \forall t\in[0,1]\Big)$$

(iii) $A_1,\ldots,A_n$ は X において可縮

このような n が存在しない場合は、$\operatorname{cat}_{X,Y}A=\infty$ と定める。

$Y=\emptyset$ のとき、$\operatorname{cat}_{X,\emptyset}A$ の代わりに、$\operatorname{cat}_X A$ と書く。$Y=\emptyset,\ A=X$ のとき、$\operatorname{cat}_{X,\emptyset}X$ の代わりに、$\operatorname{cat}X$ と書く。

補題 1. X を位相空間とし、Y,A,B は X の部分集合で、Y は閉集合とし、$Y\subset A$ とする。このとき、次が成り立つ。

(i) $\operatorname{cat}_{X,Y}(Y)=0$
(ii) $A\subset B \ \Rightarrow\ \operatorname{cat}_{X,Y}(A)\leq\operatorname{cat}_{X,Y}(B)$
(iii) $\operatorname{cat}_{X,Y}(A\cup B)\leq\operatorname{cat}_{X,Y}(A)+\operatorname{cat}_X(B)$
(iv) $$\exists\,\eta\in C([0,1]\times X,X)\ \textit{such that}\begin{cases}\eta(0,u)=u & \forall u\in A,\\ \eta(t,Y)\subset Y & \forall t\in[0,1]\\ Y\subset\eta(1,A)\end{cases}$$
$$\Rightarrow \operatorname{cat}_{X,Y}(A)\leq\operatorname{cat}_{X,Y}(\eta(1,A))$$

距離空間 X が ANE であるとは、任意の距離空間 E とその閉部分集合 D, 連続写像 $f:D\to X$ が与えられたとき、適当な D の近傍 U および f の連続な拡張 $F:U\to X$ が存在することとする。

$\mathcal{S}_\lambda(\Omega)$ の (相対位相での) 開部分集合は ANE であることが知られている。特に、$\{u\in\mathcal{S}_\lambda(\Omega): I^{(\Omega,\lambda)}(u)<b\}$ は ANE である。

補題 2. X は距離空間で、ANE とする。$A \subset X$ に対して、

$$B \text{ は } A \text{ の閉近傍}, \quad \mathrm{cat}_X(B) = \mathrm{cat}_X(A)$$

を満たす $B \subset X$ が存在する。

十分小さい $\lambda > 0$ を取り、固定する。少なくとも $\mathrm{cat}\,\Omega - 1$ 個の正値解の存在を示すのが目標なので、$\{u \in \mathcal{S}_\lambda(\Omega) : I^{(\Omega,\lambda)}(u) \in (-\infty, a_0] \cup [b_0, c_0),\ \nabla I^{(\Omega,\lambda)}(u) = 0\} = \emptyset$ を満たす $c_\lambda < a_0 < b_0 < c_0$ が存在するとして良い。a, b を、$c_\lambda < a < a_0 < b_0 < b < c_0$ を満たすようにとる。ただし、a は c_λ に十分近いとし、b は c_0 に十分近いとする。

$$X = \{u \in \mathcal{S}_\lambda(\Omega) : I^{(\Omega,\lambda)}(u) < b\}, \quad Y = \{u \in X : I^{(\Omega,\lambda)}(u) \le a\}$$

と置く。また、$c \in \mathbb{R}$ に対して、$K_c = \{u \in \mathcal{S}_\lambda(\Omega) : \nabla I^{(\Omega,\lambda)}(u) = 0,\ I^{(\Omega,\lambda)}(u) = c\}$ と置く。さらに、各 $j \in \mathbb{N}$ に対し、次のように $\mathcal{A}_j, \mathfrak{c}_j$ を定める。

$$\mathcal{A}_j = \{A \subset X : A \supset Y, \mathrm{cat}_{X,Y} A \ge j\},$$

$$\mathfrak{c}_j = \begin{cases} \inf\limits_{A \in \mathcal{A}_j} \sup\limits_{u \in A} I^{(\Omega,\lambda)}(u), & \mathcal{A}_j \ne \emptyset, \\ \infty, & \mathcal{A}_j = \emptyset \end{cases}$$

$c_\lambda < a < a_0$ より、各 $j \in \mathbb{N}$ に対して、$a < \mathfrak{c}_j$ が成り立つことを注意しておく。

以下に示す補題 4, 5, 6 により、定理は証明される。

次は補題 4 に含まれるため、述べる必要ないのだが、述べておく。

補題 3. $\mathfrak{c}_k < b$ $(k \in \mathbb{N})$ とすると、$K_{\mathfrak{c}_k} \ne \emptyset$ が成り立つ。

この補題だけだと、$\mathfrak{c}_1 < \mathfrak{c}_2 < \mathfrak{c}_3 < b$ のような場合は、少なくとも 3 個の臨界点が存在すると言えるが、$\mathfrak{c}_1 < \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_3 < b$ のような場合は少なくとも 3 個の臨界点が存在するとは言えない。しかし、次の補題が成立する。

補題 4. $k \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし、

$$\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_k = \cdots = \mathfrak{c}_{k+m} < b$$

とする。このとき、$\mathrm{cat}_X(K_{\mathfrak{c}}) \ge m + 1$ である。

以上の補題により、$\mathfrak{c}_j < b$ ならば、少なくとも j 個の臨界点が存在することがわかった。なぜなら、$\mathfrak{c}_j < b$ ならば、$\mathfrak{c}_1 \le \mathfrak{c}_2 \le \cdots \le \mathfrak{c}_j < b$ となるからである。

次の 2 つの補題によって、(1) は、少なくとも $\mathrm{cat}\,\Omega - 1$ 個の正値解を持つことがわかる。

補題 5. $\mathrm{cat}_{X,Y} X \ge j$ とすると、$\mathfrak{c}_j < b$ が成り立つ。

補題 6. $\mathrm{cat}_{X,Y} X \ge \mathrm{cat}\,\Omega - 1$

参考文献

[1] N. Hirano and N. Shioji, *Existence of positive solutions for a semilinear elliptic problem with critical Sobolev and Hardy terms*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2585–2592.

[2] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent*, Adv. Differential Equations **1** (1996), 241–264.

[3] M. Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.