On cubic NLS and NLKG with dissipative structure*

砂川 秀明 (阪大・理)

$\mathbb{R}$ 上の非線型 Klein-Gordon 方程式

$$u_{tt} - u_{xx} + u = F(u, u_t, u_x) \qquad (NLKG)$$

および非線型 Schrödinger 方程式

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} = F(u, u_x) \qquad (NLS)$$

の解の長時間挙動に関して [1] と [2] で得られた結果を紹介する．主張をおおまかに述べると，

(i) $F(u,v,w)$ は u,v,w に関する斉 3 次多項式 (係数は実数) で

$$\sup_{|y|<1} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} F\left(\cos\theta,\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-y^2}},\ \frac{y\sin\theta}{\sqrt{1-y^2}}\right) d\theta < 0$$

を満たすとする．このとき (NLKG) の初期値問題の解 $u(t,x)$ は, 初期値の大きさに関する適当な制約の下で $t \to +\infty$ において $x \in \mathbb{R}$ に関して一様に, $O((t\log t)^{-1/2})$ というオーダーで減衰する．

(ii) $F(u,v)$ は $u, v, \overline{u}, \overline{v}$ に関する斉 3 次多項式 (係数は複素数) で

$$F(e^{i\theta}, 0) = e^{i\theta} F(1,0) \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

かつ

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} F(e^{i\theta}, i\xi e^{i\theta}) d\theta < 0$$

を満たすとする．このとき (NLS) の初期値問題の解 $u(t,x)$ は, 初期値の大きさに関する適当な制約の下で $t \to +\infty$ において $x \in \mathbb{R}$ に関して一様に, $O((t\log t)^{-1/2})$ というオーダーで減衰する．

(NLKG) の場合も (NLS) の場合も, $F \equiv 0$ に対する自明でない解の減衰オーダーは $O(t^{-1/2})$ よりも速くはなり得ないということを思い出すと, 上の 2 つの主張は**非線型項が消散的に作用するための条件**を与えていると解釈できる．

参考文献

[1] H.Sunagawa, *Large time behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with nonlinear dissipative terms*, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 379–400.

[2] N.Hayashi, P.I.Naumkin and H.Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type*, SIAM J. Math. Anal., to appear.

*於 熊本大学応用解析セミナー, 2007 年 11 月 10 日 (土)