4階非線形 Schrödinger 型方程式の定在波解について

瀬片純市

福岡教育大学教育学部 数学教育講座
e-mail segata@fukuoka-edu.ac.jp

1. 概要

本講演では以下のような4階非線形 Schrödinger 型方程式の定在波解の存在について考える.

$$i\partial_t\psi + \partial_x^2\psi + a\partial_x^4\psi = \mathcal{N}(\psi, \overline{\psi}, \partial_x\psi, \partial_x\overline{\psi}, \partial_x^2\psi, \partial_x^2\overline{\psi}), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

ここに $\psi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ は複素数値未知関数であり, (1.1) の非線形項 $\mathcal{N}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\psi, \overline{\psi}, \partial_x\psi, \partial_x\overline{\psi}, \partial_x^2\psi, \partial_x^2\overline{\psi}) &= -\frac{1}{2}|\psi|^2\psi - \frac{3}{8}a|\psi|^4\psi - \frac{3}{2}a(\partial_x\psi)^2\overline{\psi} - a|\partial_x\psi|^2\psi \\ &\quad -\frac{1}{2}a\psi^2\partial_x^2\overline{\psi} - 2a|\psi|^2\partial_x^2\psi,\end{aligned}$$

で与えられる. ただし a は実定数である.

方程式 (1.1) は, 境界のない無限領域を満たす, 非圧縮, 非粘性流体中の渦糸の運動を記述するモデルである. この方程式は渦糸運動の1次近似として現れる Da Rios モデル (非線形 Schrödinger 方程式)

$$i\partial_t\psi + \partial_x^2\psi = -\frac{1}{2}|\psi|^2\psi, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

の高次近似モデルとして Fukumoto-Moffatt [3] により提唱された. これらの方程式の物理学的背景については [3] を参照されたい. 方程式 (1.1) の初期値問題の適切性, すなわち, (1.1) の解の存在, 一意性および解の初期値連続依存性については, [5], [8], [9] などにおいて調べられている.

本講演では方程式 (1.1) の定在波解について考える. ここで, (1.1) の定在波解とは (1.1) の解のうちで

$$\psi(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x),$$

の形をしたものを指す. ここに ω は実数である. $\psi(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ が (1.1) の解ならば関数 $\phi_\omega(x)$ は以下の常微分方程式を満たさなければならない:

$$-\omega\phi + \phi'' + a\phi'''' = \mathcal{N}(\phi, \overline{\phi}, \partial_x\phi, \partial_x\overline{\phi}, \partial_x^2\phi, \partial_x^2\overline{\phi}). \tag{1.3}$$

本講演の主な目的はこの常微分方程式の解を構成することである. ここでは ϕ は実数値関数であるとして以下の問題について考える.

$$\begin{cases} -\omega\phi + \phi'' + a\phi'''' = -\dfrac{1}{2}\phi^3 - \dfrac{3}{8}a\phi^5 - \dfrac{5}{2}a\phi(\phi')^2 - \dfrac{5}{2}a\phi^2\phi'', \\ \phi \in H^2(\mathbb{R}),\ \phi \neq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

われわれは具体的に方程式 (1.4) の解を構成することが出来た. 主定理は以下の通りである.

Theorem 1.1. *b を 2 次方程式*

$$at^2 + t - \omega = 0, \tag{1.5}$$

の正の解とする．このとき

$$\phi = \frac{4\sqrt{b}}{e^{\sqrt{b}x} + e^{-\sqrt{b}x}}$$

は (1.4) の解である．

Remark. (a) 方程式 (1.3) の構造より，もし $\phi(x)$ が方程式 (1.3) の解ならば，任意の $\theta, y \in \mathbb{R}$ に対して $e^{i\theta}\phi(x-y)$ も (1.3) の解になることが容易に確かめられる．したがって $\bigcup\{e^{i\theta}\phi(\cdot - y)|\theta, y \in \mathbb{R}\}$ は (1.3) の解集合の部分集合となる．しかしこの集合が (1.3) の解集合全体と一致するかは今のところ不明である．

(b) 4 階非線形 Schrödinger 型方程式 (1.1) において $a \to 0$ とすると非線形 Schrödinger 方程式 (1.2) を得る．一方, (1.5) において $a \to 0$ とすると関数

$$\phi_\omega(x) = \frac{4\sqrt{\omega}}{e^{\sqrt{\omega}x} + e^{-\sqrt{\omega}x}}$$

を得るが $\psi = e^{i\omega t}\phi_\omega$ は非線形 Schrödinger 方程式 (1.2) の定在波解である．このような意味でわれわれのの主定理は非線形 Schrödinger 方程式 (1.2) の結果と両立する．

講演では常微分方程式 (1.5) を解く際に，なぜ 2 次方程式 (1.5) が現れるのか，ということについて説明する．また定在波解が具体的に求まっている場合にどのようにしてその安定性や不安定性がわかるのかということを Ohta[7] にしたがって説明する予定である．

References

[1] Cazenave T., *"Semilinear Schrödinger equations."* Courant Lecture Notes in Mathematics **10** (2003).

[2] Colin, M. and Ohta, M., *Stability of solitary waves for derivative nonlinear Schrödinger equation.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **23** (2006), no. 5, 753–764.

[3] Fukumoto Y. and Moffatt H. K., *Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part I. A higher-order asymptotic formula for the velocity*, J. Fluid. Mech. **417** (2000), 1-45.

[4] Grillakis M., Shatah J. and Strauss W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I.* J. Funct. Anal. **74** (1987), no. 1, 160–197

[5] Huo Z. and Jia Y., *The Cauchy problem for the fourth-order nonlinear Schrödinger equation related to the vortex filament.* J. Differential Equations **214** (2005), no. 1, 1–35.

[6] Levandosky S. P., *A stability analysis of fifth-order water wave models.* Phys. D **125** (1999), no. 3-4, 222–240.

[7] Ohta M. *Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity.* Kodai Math. J. **18** (1995), no. 1, 68–74.

[8] Segata J., *Well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation related to the vortex filament*, Diff. and Integral Equations **16** (2003), 841–864.

[9] Segata, J., *Remark on well-posedness for the fourth order nonlinear Schrodinger type equation.* Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 12, 3559–3568