劣臨界型の非線形消散項を持つ Schrödinger 方程式の解の漸近挙動について

北 直泰 (宮崎大学)

1 Introduction

今回の発表は下村明洋氏（学習院大学）との共同研究である. 次の非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\dfrac{1}{2}\partial_x^2 u + \lambda\mathcal{N}(u), \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbf{R}$ で, $u = u(t) = u(t,x)$ は複素数値関数, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$ である. 係数 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ は複素数で, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_2 < 0$ とする. 非線形項 $\mathcal{N}(u)$ はゲージ不変なベキ型のもの, つまり,

$$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u \quad (1 < p < 3)$$

とする. (実は, 漸近挙動の error の評価を行うために, ベキ p を 3 に十分近く選んでおく必要がある).

方程式 (1.1) は非線形ファイバー工学の分野でよく登場するもので, それを解くことにより光ファイバー内を伝播する波の形を予測できる. この場合, t は光ファイバーに沿った位置を表す変数であり, x は波形を表現するための時刻変数である. (数学と工学では t, x の意味が逆転している.) また, $|u(t,x)|$ はファイバー内を伝播する波の包絡線を表している. 更に, λ_1 は電束密度 D が電界の強さ E に非線形的に依存するという非線形 Kerr 効果の度合を表し, λ_2 は電流密度 j が E に非線形的に依存するという非線形 Ohm の法則の度合を表す (物理的な詳細は [1] に記述されている). 方程式 (1.1) は電流によるエネルギー損失を踏まえて導かれたモデルであるから, 直感的にファイバーを通過する過程で波が徐々に小さくなることが予想される. そこで, この講演では解析学的な手法を用いて波の減衰オーダーを決定し, さらに波形の漸近的な挙動を捉えることを目標にする.

方程式 (1.1) の漸近解析については, 数多くの研究者によって様々な成果が挙げられている. その大半は証明の過程で方程式の保存則や特殊な等式を利用する立場から $\lambda \in \mathbf{R}$ の場合で考察されている. しかし, 小さいデータに話題を制限するのなら, λ が複素数になっても保存則等を利用しないで解の漸近形を調べることは容易である. 空間１次元の場合に絞って既知の結果を紹介すると,

(A) $p > 3$ の場合 (例えば, [8, 9, 13] を参照). λ は任意の複素数とする. また, $\|u_0\|_{H^{1,0}\cap H^{0,1}} < \rho_0 \ll 1$ とする. このとき,

(1) (1.1) の時間大域解が $C([0,\infty);H^{1,0}\cap H^{0,1})$ で唯一存在する.

(2) ある $\phi_+\in H^{1,0}\cap H^{0,1}$ と $\gamma>0$ が存在して, $t\to\infty$ のとき

$$u(t,x)=(it)^{-1/2}\exp(ix^2/2t)\mathcal{F}\phi_+(x/t)+O(t^{-1/2-\gamma})\quad \text{in } L^\infty$$

が成り立つ.

(3) $\|u(t)\|_{L^\infty}\le C(1+|t|)^{-1/2}$ が成り立つ.

主張 (A) において, $H^{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$ は weighted Sobolev 空間で,

$$H^{\alpha,\beta}=\{f(x)\in L^2(\mathbf{R});\ \|f\|_{H^{\alpha,\beta}}<\infty\},$$

のように定義される. ここで, $\|f\|_{H^{\alpha,\beta}}=\|\langle x\rangle^\beta\langle D\rangle^\beta f\|_{L^2}$ とし, $\langle x\rangle^\beta=(1+x^2)^{\beta/2}$, $\langle D\rangle^\alpha=\mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^\alpha\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ は Fourier 変換) とする.

線形 Schrödinger 方程式の解 $U(t)f_0\equiv\exp(it\partial_x^2/2)f_0$ が,

$$\begin{aligned}U(t)f_0 &= (2\pi it)^{-1/2}\int\exp(i(x-y)^2/2t)f_0(y)\,dy\\ &= (2\pi it)^{-1/2}\exp(ix^2/2t)\int e^{-ixy/t}\exp(iy^2/2t)f_0(y)\,dy\\ &\sim (it)^{-1/2}\exp(ix^2/2t)\mathcal{F}f_0(x/t)\quad (t\to\infty)\end{aligned}$$

のような漸近形を持つことに注意すると, (A)(2) は非線形 Schrödinger 方程式の解 $u(t)$ が線形 Schrödinger 方程式の解と似たような挙動になることを意味している.

次に $p=3$ (臨界ベキ) の場合について既知の結果を紹介する.

(B) $p=3$ の場合 ($\lambda_2=0$ については Hayashi-Naumkin [6], $\lambda_2<0$ については Shimomura [12]). $\lambda\in\mathbf{C}$ かつ $\lambda_2\le 0$ とし, $\|u_0\|_{H^{1,0}\cap H^{0,1}}<\rho_0\ll 1$ とする. このとき,

(1) (1.1) の時間大域解が $C([0,\infty);H^{1,0}\cap H^{0,1})$ で唯一存在する.

(2) ある $\mathcal{F}\phi_+\in L^2\cap L^\infty$ と $\gamma>0$ が存在して, $t\to\infty$ のとき

$$u(t,x)=(it)^{-1/2}\exp(ix^2/2t)\exp(-i\Theta(t,x/t))\mathcal{F}\phi_+(x/t)+O(t^{-1/2-\gamma})\quad \text{in } L^\infty$$

が成り立つ. ただし,

$$\Theta(t,x)=\begin{cases}\lambda|\mathcal{F}\phi_+(x)|^2\log t & (\text{if } \lambda_2=0),\\ \dfrac{\lambda}{2|\lambda_2|}\log(1+2|\lambda_2||\mathcal{F}\phi_+|^2\log t) & (\text{if } \lambda_2<0).\end{cases}$$

(3) 以下の不等式が成り立つ.

$$\|u(t)\|_{L^\infty}\le C\begin{cases}(1+t)^{-1/2+1/q} & (\text{if } \lambda_2=0),\\ (1+t)^{-1/2}(\log(2+t))^{-1/2} & (\text{if } \lambda_2<0)\end{cases}$$

(B)(2) より, $p=3$ の場合は (A) と異なって, 線形解に修正因子がついた関数形に漸近的に近づく. これは, 非線形項 $\mathcal{N}(u(t))$ の $|u(t)|^2$ にあたる部分が悪い時間減衰を持つことに起因する. 従って, $p=3$ が漸近自由か否かの分かれ目 (臨界ベキ) になっている.

そして, $p<3$ (劣臨界ベキ) の場合については, 以下の結果が知られている. 初期データには「空間方向の減衰」と「解析性」および「非ゼロ条件」という強い制限が課されいることに注意.

(C) $\boldsymbol{1<p<3}$ の場合 (Hayashi-Kaikina-Naumkin [5]). $\lambda \in \mathbf{R}$ とする. また, ある $\beta>0$ と $n>8/(p-1)$, および $0<\rho_0 \ll 1$ に対して,

$$\begin{aligned}&\|e^{\beta D}\psi^n u_0 e^{-ix^2/2}\|_{H^{1,0}}+\|e^{\beta D}\psi^{n+1}(u_0 e^{-ix^2/2})_x x\|_{H^{1,0}} \le \rho_0,\\ &\psi^{n+1/2}|u_0| \ge \rho_0\end{aligned}$$

とする. ただし, $\psi=\frac{1}{\rho_0}+x^2$ である. このとき,

(1) (1.1) の時間大域解が $e^{\beta D/2}\mathcal{F}U(-t)u(t) \in C([0,\infty);L^2)$ で唯一存在する.

(2) ある $\mathcal{F}\phi_+$ ($e^{\beta D/2}\mathcal{F}\phi_+ \in L^2$) と $\gamma>0$ が存在して, $t\to\infty$ のとき

$$u(t,x)=(it)^{-1/2}\exp(ix^2/2t)\exp(-i\Theta_p(t,x/t))\mathcal{F}\phi_+(x/t)+O(t^{-1/2-\gamma}) \quad \text{in } L^\infty$$

が成り立つ. ただし,

$$\Theta_p(t,x)=\frac{2\lambda t^{(3-p)/2}}{3-p}|\mathcal{F}\phi_+(x)|^{p-1}+O(1+t^{2-p}) \quad \text{as } t\to\infty \text{ in } L^\infty.$$

(3) $\|u(t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/2}$ が成り立つ.

(C) の証明では, 未知変数 $u(t)$ を $w(t)=\mathcal{F}e^{ix^2/2t}U(-t)u(t)$ のように変換し,

$$i\partial_t w=\lambda t^{-(p-1)/2}\mathcal{N}(w)-\frac{1}{2t^2}\partial_x^2 w$$

を導き, $w(t)$ の挙動を見ることで $u(t)$ の挙動を捉えている. その際, 右辺の $-\dfrac{1}{2t^2}\partial_x w$ を error と見なすので, 高階微分の評価が必要になる. しかし, 非線形項 $\mathcal{N}(w)$ は $w=0$ で滑らかではないので, 非線形評価がうまくいくためには $w(t,x)\neq 0$ を保証する「非ゼロ条件」が必要になってしまう. また, $w=A(t,x)\exp(-i\varphi(t,x))$ とおいて, $A(t,x)$ と $\varphi(t,x)$ の方程式系で評価を推し進めると右辺から derivative loss が生じるので, その困難を克服するために「解析性」の条件を利用する.

Hayashi-Kaikina-Naumkin のこのアイデアは実は $\lambda_2<0$ の場合にも適用可能であるが, 依然として初期データに強い制約が必要になる. そこで, 我々は別のアプローチを試み, 初期データについて $u_0 \in H^{1,0}\cap H^{0,1}$ 程度の条件で解の漸近挙動を捉えた. 本講演の主定理は以下のとおり.

Theorem 1.1 $\lambda_2 < 0$ とし, $p < 3$ は 3 に十分近くとる. また, $\|u_0\|_{H^{1,0}\cap H^{0,1}} < \rho_0 \ll 1$ とする. このとき,

(1) (1.1) の時間大域解が $C([0,\infty); H^{1,0}\cap H^{0,1})$ で唯一存在する.

(2) ある $\mathcal{F}\phi_+ \in L^2 \cap L^\infty$ と $\gamma > 0$ が存在して,

$$u(t,x) = (it)^{-1/2}\exp(ix^2/2t)\exp(-i\Theta_p(t,x/t))\mathcal{F}\phi_+(x/t) + O(t^{-1/(p-1)-\gamma}) \quad in\ L^\infty,$$

が成り立つ. ただし,

$$\Theta_p(t,x) = \frac{\lambda}{(p-1)|\lambda_2|}\log\left(1 + \frac{2(p-1)|\lambda_2|}{3-p}t^{(3-p)/2}|\mathcal{F}\phi_+|^{p-1}\right).$$

(3) $\|u(t)\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/(p-1)}$ が成り立つ.

Remark 1 Theorem 1.1 で, p を 3 に近く取り, 初期データを十分小さく取る理由は, error の評価に必要なノルム $\|Ju(t)\|_2 = \|(x+it\partial_x)u(t)\|_2$ の growth order が $C(3-p)+C\rho_0$ 程度になるからである.

Remark 2 Theorem 1.1 (3) で, $\|u(t)\|_{L^\infty}$ の減衰オーダーは線形 Schrödinger 方程式の解よりも早い. また, それは常微分方程式

$$i\frac{du}{dt} = \lambda\mathcal{N}(u)$$

の解の減衰オーダーと同じである. この事実と (A), (B) の主張から言えることは,

- $3 < p$ の場合, Lapracian $-\frac{1}{2}\partial_x^2$ の分散効果が非線形消散効果を上回る.
- $p = 3$ の場合, Lapracian $-\frac{1}{2}\partial_x^2$ の分散効果と非線形消散効果がつりあう.
- $p < 3$ の場合, 非線形消散効果が Lapracian $-\frac{1}{2}\partial_x^2$ の分散効果を上回る.

最後に本講演で登場する記号について紹介する. Fourier 変換 $\mathcal{F}\phi = (2\pi)^{-1/2}\int e^{-i\xi x}\phi(x)\,dx$ とし, $\mathcal{F}^{-1}$ は逆 Fourier 変換を表す. L^p $(1 \le p \le \infty)$ は Lebesgue 空間で, ノルムは $\|\phi\|_{L^p} = (\int|\phi(x)|^p\,dx)^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$ とし, $\|\phi\|_{L^\infty} = \mathrm{ess.sup}_{x\in\mathbf{R}^n}|\phi(x)|$ とする. また, Shrödinger group $U(t)$ の因数分解

$$U(t) = MD\mathcal{F}M$$

を頻繁に用いる. ここで, M は $\exp(ix^2/2t)$ を掛ける掛け算作用素であり, D L^2 を保存する伸張作用素 $Df(x) = (it)^{-1/2}f(x/t)$ である. $U(-t) = (U(t))^{-1} = M^{-1}\mathcal{F}^{-1}D^{-1}M^{-1}$ が成り立つことにも注意しておく.

References

[1] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, Inc. (1995).

[2] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schödinger equations, II, scattering theory*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 33–71.

[3] J. Ginibre and T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension* $n \geq 2$, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[4] J. Ginibre, T. Ozawa and G. Velo, *On the existence of the wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **60** (1994), 211–239.

[5] N. Hayashi, E. I. Kaikina and P. I. Naumkin, *Large time behavior of solutions to the generarized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **5** (1999), 93–106.

[6] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–645.

[7] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotic behavior in time of solutions to the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **68** (1998), 159–177.

[8] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Math. Z. **192** (1986), 637–650.

[9] N. Hayashi and M. Tsutsumi, L^∞*-decay of classical solutions for for nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **104** (1986), 309–327.

[10] J. E. Lin and W. A. Strauss, *Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **30** (1978), 245–263.

[11] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[12] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1407–1423.

[13] W. A. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal. **41**, 110–133.