原点または無限遠点で $au_+^{p-1} - bu_-^{p-1} + o(|u|^{p-1})$ であるような非線形項を持つ p-Laplacian 方程式の非自明な弱解の存在について

東京理科大学理学部二部数学科　田中　視英子

本講演では，以下の方程式 (P) の非自明な弱解の存在について報告する．

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域で, $1 < p < \infty$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ である．

非線形項 f が

$$f(x,u) = a_0 u_+^{p-1} - b_0 u_-^{p-1} + o(|u|^{p-1}) \quad \textit{at } 0$$

または

$$f(x,u) = a u_+^{p-1} - b u_-^{p-1} + o(|u|^{p-1}) \quad \textit{at } \infty$$

であるような場合を考え, (a_0, b_0), $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ が特別な状況にある場合に変分法を用いて方程式 (P) の解の存在を示す.

Fučík spectrum について　ある非自明な $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が存在して,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx = a\int_\Omega u_+^{p-1}\varphi\, dx - b\int_\Omega u_-^{p-1}\varphi\, dx \quad \text{for any } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1)$$

を満たすとき，$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ は $-\Delta_p$ の Fučík spectrum であるといい，以下では Fučík spectrum 全体の集合を Σ_p で表す.

本講演では，まず $m \geq 2$ に対して

$$Q_m := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2\, ;\, \lambda_m < a, b < \lambda_{m+1}\},$$

と定義し, $(a,b) \in \overline{Q}_m \setminus \Sigma_p$ のときに

$$-\Delta_p u = a u_+^{p-1} - b u_-^{p-1} \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

に対応する汎関数の原点での m 次の citical group が非自明であることを紹介し、方程式 (P) の非自明な解の存在を示す ([1]), ここで $\{\lambda_m\}_m$ は Perera([2]) によって定義された $-\Delta_p$ の固有値の列 である.

参考文献

[1] M. Tanaka, *Some remarks on the existence of a non-trivial weak solution for the p-Laplacian equation with the nonlinearity like* $au_+^{p-1} - bu_-^{p-1} + o(|u|^{p-1})$ *at* 0 *or* ∞, submitted.

[2] K. Perera, *Nontrivial critical groups in p-Laplacian problems via the Yang index*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **21**(2003), 301–309.