Double layer potential operators on Hardy spaces

東海大学　開発工学部　小森康雄

題名は「Double layer potential operators on Hardy spaces」であるが話の大部分は「Hardy 空間上の特異積分」である．キーワードは
(1) convolution 型でない特異積分作用素（一般化された特異積分作用素）
(2)「$T1$ 定理」: 一般化された特異積分作用素の L^2 有界性に関する理論
(3) Hardy 空間，cancellation property
(4) 1 次元と n 次元の違い
特に (4) は double layer potential operator (R^n 上の作用素) を考えるとき大事になる．

1　古典的な特異積分作用素

定義 1　作用素 T が積分核 K を持つ古典的な特異積分作用素であるとは

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x-y)f(y)dy, \qquad f \in \mathcal{S}(R^n)$$

と表せて，K が以下の条件を満たすことをいう．

(i) $$|K(x)| \le \frac{C}{|x|^n},$$

(ii) $$|\nabla K(x)| \le \frac{C}{|x|^{n+1}},$$

(iii) $$\int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)dx = 0, \qquad 0 < \forall\varepsilon < \forall N < \infty.$$

例 (Hilbert 変換)

$$Hf(x) = \text{p.v.} \int_{R^1} \frac{1}{x-y} f(y)dy.$$

注意　条件 (ii) は弱めることができる．そしてどこまで弱めることができるかは大きな問題であるが (佐藤 [85] を参照)，ここでは論じない．滑らかさ以外の条件に興味があるからである．具体的に言うと条件 (iii) に興味あるのである．そしてこの条件を **cancellation property** という (§5 定理 2 の条件と比較せよ)．

命題 1(Calderón and Zygmund [8])
古典的な特異積分作用素は $L^p(R^n)$ 上の有界作用素である ($1 < p < \infty$)．

証明　(i) ∼ (iii) によって $\hat{K} \in L^\infty$ がわかり ($|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}/y dy| \le C$ の一般化である)，それにより T の L^2 有界性が導かれる．　$\cdots(*)$
そして L^2 有界性がわかると L^p 有界性が導かれるというのが Calderón-Zygmund の理論である．

$\square$

次に Hardy 空間を定義する.

定義 2(Hardy 空間 H^p)　最大関数 $\mathcal{M}f$ を次のように定義する.

$$\mathcal{M}f(x) \equiv \sup_{y>0} |P_y * f(x)|, \qquad P_y : \text{Poisson kernel}.$$

そして

$$H^p(R^n) \equiv \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{H^p} = \|\mathcal{M}f\|_{L^p} < \infty\}.$$

注意　$P_y \notin \mathcal{S}$ なので意味づけが必要であるが.

そして $H^p = L^p$ $(1 < p < \infty)$. $H^p \subset \mathcal{S}'$ $(p < 1)$ であるが $H^1 \subset L^1$ である.

命題　$f \in H^p \cap H^1$ のとき $\int_{R^n} f(x)dx = 0$.

これは大事な性質で Hardy 空間の **cancellation property** と呼ばれる.

命題 2(Fefferman and Stein [30])

古典的な特異積分作用素は $H^p(R^n)$ 上の有界作用素である $(n/(n+1) < p \leq 1)$.

注意　以下では話を簡単にするために，Hardy 空間を考えるときは常に $n/(n+1) < p \leq 1$ を仮定する. (ii) において K の滑らかさを十分に仮定すれば p を 0 に近づけることができる. ここで解説する結果はすべて $p = 1$ に限ったとしても意味ある結果である.

この命題の証明は自明ではないが，後でもっと一般的な形で証明するので証明は省略する.

2　一般化された特異積分作用素

この節では convolution 型でない特異積分作用素を考える.

定義 3　作用素 T が積分核 K を持つ一般化された特異積分作用素であるとは

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x,y)f(y)dy, \qquad f \in \mathcal{S}(R^n)$$

と表せて，以下の条件を満たすことをいう.

(i')
$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n},$$

(ii')
$$|\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}},$$

注意　古典的な場合と違い，積分 $Tf(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} K(x,y)f(y)dy$ が収束するとは一般にはいえないが，ここで考える以下の具体例においては問題ない. 正確な定義に関しては [42], [76], 7,8 章を見よ.

擬微分作用素を含む非常に多くの作用素が一般化された特異積分作用素になる. ここで例としてあげるのは以下の 2 つの重要な作用素である.

関数論の問題から派生した作用素

$$C_\Gamma f(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad \Gamma \text{ は複素平面上の滑らかな曲線}$$

を考えるとき，曲線 Γ を $\Gamma=\{t+iA(t):t\in R^1\}$ と媒介変数表示すると本質的には次の作用素に帰着される．

$$\widetilde{C}_\Gamma f(x)=\int_{R^1}\frac{f(y)(1+iA'(y))}{x-y+i(A(x)-A(y))}dy. \tag{1}$$

$A'\in L^\infty(R^1)$ とすると L^p 有界性を考える場合は $1+iA'(y)$ の項は影響がないので，次の形の作用素を考えることになる．

定義 4(Lipschitz 曲線上の Cauchy 積分)

$$C_Af(x)=\text{p.v.}\int_{R^1}\frac{f(y)}{x-y+i(A(x)-A(y))}dy \qquad \text{ただし } A'\in L^\infty(R^1). \tag{2}$$

さらに $x-y+i(A(x)-A(y))=(x-y)(1+i(A(x)-A(y))/(x-y))$ として，形式的に Taylor 展開すると (§4 を見よ)

$$C_Af(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k\int_{R^1}\frac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}f(y)dy \tag{3}$$

となるので以下の作用素を考えることになる．

定義 5(k 次の Calderón's commutator)

$$T_A^kf(x)=\text{p.v.}\int_{R^1}\frac{(A(x)-A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}f(y)dy. \tag{4}$$

注意　T_A^0 は Hilbert 変換.

Calderón's commutator という名前のついている理由は以下である．Calderón [6] は擬微分作用素の属から作られるある algebra を構成するにあたり次の問題を提起した ($n=1$ の場合).

問題

M_A を関数 A の掛け算作用素, H を Hilbert 変換としたとき,

交換子作用素 $[H,M_A]=H\cdot M_A-M_A\cdot H$ は order 1 の smoothing operator になるか？

$$\frac{d}{dx}[H,M_A]f(x)=T_A^1f(x)-A'(x)Hf(x),\quad [H,M_A]\frac{d}{dx}f(x)=T_A^1f(x)-H(A'f)(x)$$

が成り立つので, $A'\in L^\infty$ の場合は, 問題は T_A^1 の L^2 有界性に帰着される ([13], p. 9 参照).

さらに次の定義をする．

定義 6　一般化された特異積分作用素 T が Calderón-Zygmund 作用素であるとは以下の条件を満たすことをいう．

(iii')　T は $L^2(R^n)$ 上の有界作用素である．

Calderón-Zygmund 作用素に関する以下の 2 つの命題はすぐわかる．

命題 1'　Calderón-Zygmund 作用素は $L^p(R^n)$ 上の有界作用素である $(1<p<\infty)$.

命題 2'　Calderón-Zygmund 作用素は $H^p(R^n)\to L^p(R^n)$ 有界である $(n/(n+1)<p\le 1)$.

注意　$T:H^p\to H^p$ 有界でないことに注意せよ．

したがって以下の 2 つのことが問題となる．
1) 一般化された特異積分作用素が L^2 有界になるための条件は？
2) Calderón-Zygmund 作用素の $H^p \to H^p$ 有界性は？
1) は Calderón-Zygmund の理論以後の特異積分の分野における 20 世紀後半の最も重要な問題の 1 つであった．§3 で解説する．
2) は本稿の中心のテーマであり §5 で論じる．

3　$T1$ 定理

一般化された特異積分作用素の L^2 有界性を証明するときの難しい点は，古典的な場合に使えたフーリエ変換の方法 (命題 1 の証明 $(*)$ を見よ) が使えないことである．
以下では話を簡単にするためにさらに次の条件を仮定する．

$$\text{(iv)} \qquad K(y,x) = -K(x,y) \qquad \text{(anti-symmetric condition)}.$$

注意　本質的ではない．もちろん例にあげた Cauchy 積分と Calderón's commutator はこの条件を満たす.
David and Journé による素晴らしい定理を述べる前に準備をする．

命題 3(Stein [87])　T を Calderón-Zygmund 作用素とすると，

$$\|Tf\|_{BMO} \le C\|f\|_{L^\infty}, \qquad f \in L^2 \cap L^\infty.$$

注意　$T : L^\infty \to L^\infty$ 有界は成り立たない．
ここで BMO は John and Nirenberg [43] によって導入された以下で定義される関数空間である．
定義 7(BMO (bounded mean oscillation))
Q で n 次元開球，$|Q|$ でその Lebesgue 測度を表す．$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$ とする．

$$BMO(R^n) = \Big\{ f \in L^1_{loc}(R^n); \|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx < \infty \Big\}.$$

注意　$L^\infty \subsetneqq BMO$,　$\log|x| \in BMO(R^n)$.
David and Journé の '$T1$ 定理' と呼ばれているのは次の定理である．

定理 1(David and Journé (1984) [26])　(i'),(ii'),(iv) を満たす一般化された特異積分作用素 T が L^2 有界となるための**必要十分条件**は

$$T1 \in BMO(R^n)$$

である．

注意　定数関数 1 に特異積分を作用させることの意味づけについては [76], p. 49 または [83], p. 268 を見よ．必要条件であることは命題 3 による．
条件 (ii') を弱めた場合の '$T1$ 定理' については Coifman, David, Meyer and Semmes [16], Yabuta [99] を参照．特異積分における最も弱い条件とされる Hölmander 条件の下で '$T1$ 定理' が成り立つかどうかについては筆者の知る限りでは未解決である．

この定理から Calderón's commutator の L^2 有界性が導かれる．

系 1([26])　$A' \in L^\infty(R^1)$ ならば T_A^k は $L^2(R^1)$ 上の有界作用素である．すなわち Calderón-Zygmund 作用素である．

証明　$k=1$ の場合を考える．部分積分により (あくまでも形式的な計算だが)

$$T_A^1(1) = \int \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}dy = \int \frac{A'(y)}{(x-y)}dy = H(A')(x).$$

命題 3 より Hilbert 変換は $L^\infty \to BMO$ 有界なので $T_A^1(1) \in BMO$．□

系 1 が証明されるまでには長い歴史がある ([6], [19], [95], p. 416 参照).

4　Tb 定理

この節では §2 で例としてあげた Cauchy 積分の L^2 有界性を考える．ここで問題になるのは定義 4 (6) で形式的に Taylor 展開したところで，実際は

1) $\|A'\|_{L^\infty} < 1$ でなければならない．
2) さらに高次の Calderón's commutator $\|T_A^k\|_{L^2\to L^2}$ の精密な評価が必要になる．

そこで別の方法を考える必要が出てきた．

そもそもこのように T_A^k の評価を積み上げていく方法では

$$\|C_A f\|_{L^2} = \|\sum (-i)^k T_A^k f\|_{L^2} \le \sum \|T_A^k f\|_{L^2}$$

の部分で悪い評価をしているのである．各項が打ち消し合うかもしれないのである．

そこで C_A の積分核の形に注目した次の方法がある．まず '$T1$ 定理' がそのままでは有効でないことに注意する．$C_A(1) = \int \frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}dy$ が BMO 関数になることは，Calderón's commutator のときのように自明ではない (系 1 の証明を参照). ところが (1) の $\widetilde{C}_\Gamma$ においては複素積分を使うことによって (形式的には) $\widetilde{C}_\Gamma(1) = \displaystyle\int \frac{(1+iA'(y))}{x-y+i(A(x)-A(y))}dy = 0$ となる．

このことをヒントにして生まれたのが 'Tb 定理' である．

定義 8　有界な複素数値関数 b が accretive であるとは，ある正の定数 c が存在して

$$\Re b(x) \ge c$$

を満たすことをいう．

注意　$b(x) = 1 + iA'(x)$ が念頭にある．

定理 2(David, Journé and Semmes[27])　T は条件 (i'),(ii'),(iv) を満たすとする．ある有界な accretive 関数 b が存在して

$$Tb \in BMO(R^n) \text{ ならば } T \text{ は } L^2(R^n) \text{ 上の有界作用素である．}$$

この定理の系として Cauchy 積分の L^2 有界性を導くことができる．

系 2(McIntosh and Meyer [71])　Cauchy 積分作用素 C_A は $A' \in L^\infty$ のとき $L^2(R^1)$ 上の有界作用素である.

補足

1), 2) の問題に関しては以下の結果もある

1) の制限を外すには David [24] の bootstrap argument というものがある. 2) については以下の結果がある.

定理 (Coifman, McIntosh and Meyer [18])

$$\|T_A^k\|_{L^2 \to L^2} \le Ck^4 \|A'\|_{L^\infty}^k.$$

注意　この評価は最良ではない ([6], [14], [19], [26], [82] 参照).

Cauchy 積分作用素の L^2 有界性の証明にはこの他に perturbation を使った方法 [7], [24], [82] があり, Murai [82] は最良の評価を得ている.

5　Hardy 空間上の Calderón-Zygmund 作用素

Alvarez and Milman [1], [3] は Calderón-Zygmund 作用素 (すなわち L^2 有界性はわかっている) の H^p 有界性に関して次の結果を得た.

定理 3(Alvarez and Milman [1], [3])　$n/(n+1) < p \le 1$ とする. (i'), (ii'), (iv) を満たす Calderón-Zygmund 作用素 T が $H^p(R^n)$ 上の有界作用素である必要十分条件は

$$T1 = 0$$

である.

注意　§2 定義 1 の条件 (iii) は形式的には $T1 = 0$ と書ける.

この定理は必要十分条件を与えているので問題ないように思えるが, $T1 = \int K(x,y)dy = 0$ という条件は積分核 K の形にひじょうに強い制限をしており, Calderón's commutator は一般にはこの条件を満たさない. そこで Calderón's commutator に応用できる定理を考え, 以下の結果を得た.

定義 9(local Hardy 空間 , Goldberg [40])　$\boldsymbol{m}f(x) = \sup_{0<y<1} |P_y * f(x)|$ と定義する. そして

$$h^p(R^n) = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{h^p} = \|\boldsymbol{m}f\|_{L^p} < \infty\}.$$

注意　$H^p \subset h^p$ であり特に $H^p = h^p = L^p$ $(1 < p < \infty)$.

local Hardy 空間は Goldberg によって擬微分作用素の有界性を調べるために導入された空間である. この空間の有用性については Evans and Müller [29], 山崎 [100] を参照.

定義 10(リプシッツ空間 $\dot{\Lambda}_\alpha$)　$0 < \alpha < 1$ とする.

$$\dot{\Lambda}_\alpha(R^n) = \left\{ f; \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = \sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

定理 3' ([48])　T は (i'), (ii'), (iv) を満たす Calderón-Zygmund 作用素とする．

$T1 \in \dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$ ならば　$T : H^p(R^n) \to h^p(R^n)$　有界である $(n/(n+\alpha) \le p \le 1)$.

注意　条件 $n/(n+\alpha) \le p$ は最良である．

突然リプシッツ空間が現れたと思うかもしれないが，実は次の事実がある．

命題 4(Campanato [9])

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \approx \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\alpha/n}} \int_Q |f(x) - f_Q| dx.$$

すなわち $BMO = \dot{\Lambda}_0$ とみなせるわけである．さらにこの定理は Calderón's commutator に応用できる．

系 3' ([48])　　$A' \in L^\infty(R^1) \cap \dot{\Lambda}_\alpha(R^1)$ ならば

$$T_A^1 : H^p(R^1) \to h^p(R^1) \text{ 有界である} \qquad (1/(1+\alpha) \le p \le 1).$$

証明　$T_A^1(1) = H(A')(x)$ で, Hilbert 変換は $\dot{\Lambda}_\alpha$ 上の有界作用素だから $T_A^1(1) \in \dot{\Lambda}_\alpha$．□

6　定理の証明

まず定理 3, 3' の証明に必要な Hardy 空間上の atom と molecule の概念を解説する．

6.1　atom

Fefferman and Stein [30](1972) により大いに発展した実解析的手法による Hardy 空間の研究の大きな成果の１つとして Coifman [15], Latter [63] による atom 分解がある．

以下では中心 x_0 半径 r の開球を $B(x_0, r) = \{x \in R^n; |x - x_0| < r\}$ と書くことにする．

定義 11(H^p-atom)　$n/(n+1) < p \le 1$ とする．関数 $a(x)$ が $B(x_0, r)$ 上の H^p-atom であるとは

$$\mathrm{supp}(a) \subset B(x_0, r), \qquad \|a\|_{L^\infty} \le r^{-n/p}, \qquad \int a(x)dx = 0.$$

注意　$p \le n/(n+1)$ のときの atom については, たとえば [63], [66] を見よ.

定理 4(atom 分解, Coifman [15], Latter [63])　$n/(n+1) < p \le 1$ とする．

$$f \in H^p(R^n) \iff f = \sum_{j=1}^\infty c_j a_j, \quad a_j \text{ は } H^p\text{-atom で } \sum_{j=1}^\infty |c_j|^p \approx \|f\|_{H^p}^p.$$

この定理を使うと Calderón-Zygmund 作用素 T の H^p 有界性を証明するには次のことを示せばよいことがわかる．

$$\text{任意の } H^p\text{-atom } a \text{ に対して } \|Ta\|_{H^p} \le C,$$

ここで C は atom a に依存しない定数.

6.2 molecule

Calderón-Zygmund 作用素 T の H^p 有界性を証明するときの古典的な場合との大きな違いは，補題 2 が使えないことである (補題 2 の証明の $(**)$ を見よ)．だから $\|Ta\|_{H^p}$ をまじめに評価する必要がある．ところが $\|Ta\|_{H^p} = \|\mathcal{M}Ta\|_{L^p}$ だから 2 つの作用素を施した関数の評価をする必要があり，このままでは難しい．そこで Taibleson and Weiss [92], [93] は molecule を導入した．

定義 12 (H^p-molecule, Taibleson and Weiss [92], [93])　$n/(n+1) < p \le 1$ とする．関数 $M(x)$ が $B(x_0, r)$ を中心とする H^p-molecule であるとは

$$(\mathrm{M}_1)\qquad \Big(\int_{|x-x_0|<2r} |M(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \le r^{n(1/2-1/p)},$$

$$(\mathrm{M}_2)\qquad |M(x)| \le \frac{r^{n(1-1/p)+1}}{|x-x_0|^{n+1}} \qquad \text{for} \qquad |x-x_0| \ge 2r,$$

$$(\mathrm{M}_3)\qquad \int M(x)dx = 0.$$

命題 5([92], [93])

$$M \text{ が } H^p\text{-molecule ならば} \quad \|M\|_{H^p} \le C.$$

この命題より Calderón-Zygmund 作用素 T の H^p 有界性を証明するには

‘a が $B(x_0, r)$ 上の H^p-atom のとき $C \cdot Ta$ が $B(x_0, r)$ を中心とする H^p-molecule である’
ことを示せばよい．

実際に Alvarez and Milman はこのこと示して H^p 有界性 (定理 3) を証明した．条件 (M_3) を保証するのが条件 $T1 = 0$ である．

そこで我々のすることは local Hardy 空間上で molecule を構成することである．

定義 13(h^p-molecule, [48])　$n/(n+1) < p \le 1$ とする．関数 $M(x)$ が $B(x_0, r)$ を中心とする h^p-molecule であるとは，$(\mathrm{M}_1), (\mathrm{M}_2)$ と次を満たすことをいう．

$$(\mathrm{M}_3')\qquad \Big|\int M(x)dx\Big| \le 1.$$

命題 5’([48])

$$M \text{ が } h^p\text{-molecule ならば} \quad \|M\|_{h^p} \le C.$$

この命題を使い $H^p \to h^p$ 有界性 (定理 3’) が証明できる．条件 (M_3') を保証するのが条件 $T1 \in \dot{\Lambda}_\alpha$ であり，リプシッツ空間が出てくる理由は Hardy 空間の共役空間がリプシッツ空間であることによる．

7 Cauchy 積分の H^p 有界性

§6.2 と §4 Tb 定理のアイデアを使い，関数 b に依存した molecule を構成することにより以下の Tb 定理 の H^p 版を得ることができる．

定理 6([58]) T は (i'), (ii'), (iv) を満たす Calderón-Zygmund 作用素とする．
ある有界な accretive 関数 b が存在して $b, Tb \in \Lambda_\alpha(R^n)$ ならば $T : H^p(R^n) \to h^p(R^n)$ 有界である $(n/(n+\alpha) \le p \le 1)$.

系 6([58]) $A' \in L^\infty(R^1) \cap \dot{\Lambda}_\alpha(R^1)$ ならば $C_A : H^p(R^1) \to h^p(R^1)$ 有界である $(1/(1+\alpha) \le p \le 1)$.
注意 ここでの H^p, h^p は複素数値である．

8 n 次元の作用素

Calderón's commutator と Cauchy 積分の n 次元版も考えられている．

定義 14(n dimensional Calderón's commutator)

$$T_A f(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} \frac{A(x) - A(y)}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy, \qquad \text{ただし } \nabla A \in L^\infty(R^n). \tag{5}$$

定義 15(the double layer potential operator または Cauchy integral operator for hypersuface と呼ばれている)

$$S_A f(x) = \text{p.v.} \int_{R^n} \frac{A(x) - A(y) - \nabla A(y) \cdot (x-y)}{\left(|x-y|^2 + (A(x) - A(y))^2\right)^{(n+1)/2}} f(y) dy \qquad \text{ただし } \nabla A \in L^\infty(R^n). \tag{6}$$

これらの作用素の L^p 有界性は roation method という方法により 1 次元の結果に帰着して証明される ([95] 参照).

定理 7 $\nabla A \in L^\infty(R^n)$ のとき T_A と S_A は $L^p(R^n)$ 上の有界作用素である $(1 < p < \infty)$.

the method of rotations
Riesz 変換の L^p 有界性を rotation method で証明してみる．

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{R^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy = \int_{S^{n-1}} \Omega(\omega) d\omega \int_0^\infty \frac{f(x - r\omega)}{r} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(\omega) d\omega \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x-r\omega)}{r} dr \end{aligned}$$

2 つの作用素の $H^p(R^n) \to h^p(R^n)$ 有界性に関しては

定理 8[59] $\nabla A \in L^\infty(R^n) \cap \dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$ のとき T_A と S_A は $H^p(R^n) \to h^p(R^n)$ 有界である $(n/(n+\alpha) < p \le 1)$.

9　その他の関数空間と関連した話題

以上の議論でわかることは，特異積分作用素の $T : X \to Y$ 有界性を証明するためには，まず空間 X における atom 分解定理を作り，空間 Y では molecule を構成する．そして atom の T による像が molecule になることを示せばよいということである．

この考えを使って色々な空間で atom, molecule が構成され, 特異積分作用素の有界性が得られている．

(1) 重みつきの Hadry 空間においては, Miyachi, [81] Strömberg and Torchinsky [91], Quek and Yang [84], K. [54].

(2) Herz 空間に関連した Hardy 空間においては, Chen and Lau [12], García-Cuerva [34], García-Cuerva and Herrero, [36], Miyachi [80], K. [51].

(3) 離散的な Hardy 空間，Besov 空間においては, Boza and Carro [4], Kanjin and Satake [45], Boza and Torres [5], K. [49], [57]

(4) Morrey 空間の predual もやはり Hardy 空間に似た性質を持っており, そこにおいては, Alvarez [2], K. [52].

(5) $T1 = 0$ を仮定した議論は [31], [33], [38], [96] で細かくなされていて，Triebel-Lizorkin 空間が扱われている．これら 4 つの論文では, 今回話さなかった滑らかな atom, molecule が扱われており, wavelet の理論との関係を知ることができる．

(6) atom によく似た block と呼ばれる関数があり, block により生成される空間というものがある．この空間は $L \log L$ 空間と関連があり興味深い．この空間に関連しては Taibleson and Weiss [94], Lu, Taibleson and Weiss [67], Keitoku and Sato [46].

(7) 本論では R^n に話を限ったが, 領域上での Hardy 空間というのも考えられている．Chang, Dafni and Stein [10], Chang, Krantz and Stein [11], Miyachi [78].

(8) atom, molecule の定義を見ればわかるように，適当な距離 d と測度 μ が与えられている空間 (X, d, μ) 上で Hardy 空間を考えることができる．このような空間を space of homogeneous type という．Coifman and Weiss [22],[23], Macías and Segovia [69], [70].

(9) Coifman, Rochberg and Weiss の commutator [21] という重要な作用素があり, その dual の形としての multilinear singular integral と合わせて研究されている．このときやはり Hardy 空間や atom の議論が必要となる．Coifman and Grafakos [17], Grafakos [41], Miyachi [77], [79], K. and Mizuhara [60], [61] K. and Shirai [62], Shirai [86].

最後に参考書をあげておく．古典的な特異積分に関しては, すでに古典となっている Stein [88] と Stein and Weiss [90] があるが，Fefferman and Stein (1972) 以降の成果も含めた前 2 著のリニューアル版とでも呼べる教科書には Stein 自身による大著 [89] 以外にもたくさんある．Hardy 空間に関しては García-Cuerva and Rubio de Francia [35], Grafakos [42], Lu [66], Torchinsky [95], Uchiyama[98]．一般化された特異積分については [42], [95], Journé [44], Coifman and Meyer [20], 特に Cauchy 積分に関しては David [25], Murai [82], さらに $T1$-theorem に関しては [42], Christ [13], Duoandikoetxea [28], Meyer and Coifman [76] を参照.

これらの中で [25] と [76] は wavelet の理論にもとづいて書かれている．[76] はその前半部分にあたる [75] と合わせて wavelet の良い教科書でもある．

Journé [44] には '$T1$ 定理' のプロトタイプに当たる定理が書かれている．

Kenig [47], Lewis and Murray [65] では double layer potential が取り上げられており，偏微分方程式と特異積分, 特に '$T1$ 定理' の関係を知ることができる．

参考文献

[1] J. Alvarez, *H^p and weak H^p continuity of Calderón–Zygmund type operators*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **157** (1994), 17–34, Marcel Dekker Inc.

[2] J. Alvarez, *Continuity of Calderón–Zygmund type operators on the predual of a Morrey space*, Clifford Algebra in Analysis and Related Topics, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1996, 309–319.

[3] J. Alvarez and M. Milman, *H^p continuity of Calderón-Zygmund type operators*, J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), 63–79.

[4] S. Boza and M.J. Carro, *Discrete Hardy spaces*, Studia Math. **129** (1998), 31–50.

[5] S. Boza and R.H. Torres, *Decomposition of $\dot{B}_1^{0,1}(Z)$ into special atoms*, Math. Nachr. **254-255** (2003), 3–10.

[6] A. P. Calderón, *Commutators of singular integral operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1092–1099.

[7] A. P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1324–1327.

[8] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[9] S. Campanato, *Proprietá di Hölderianitá di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 175–188.

[10] D.-C. Chang, S.G. Krantz and E.M. Stein, *Hardy spaces, BMO, and elliptic boundary value problems on a smooth domian R^N*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1605–1661.

[11] D.-C. Chang, S.G. Krantz and E.M. Stein, *H^p theory on a smooth domain in R^N and elliptic boundary value problems*, J. Funct. Anal. **114** (1993), 286–347.

[12] Y.Z. Chen and K.S. Lau, *Some new classes of Hardy spaces*, J. Funct. Anal. **84** (1989), 255–278.

[13] M. Christ, *Lectures on Singular Integral Operators*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. **77**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[14] M. Christ and J.-L. Journé, *Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators*, Acta Math. **159** (1987), 51–80.

[15] R. Coifman, *A real variable characterization of H^p*, Studia Math. **51** (1974), 269–274.

[16] R. Coifman, G. David, Y. Meyer and S. Semmes, *ω-Calderón-Zygmund operators*, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Math. **1384**, (1989), 132–145.

[17] R. Coifman and L. Grafakos, *Hardy space estimates for multilinear operators. I*, Rev. Mat. Iberoamericana **8** (1992), 45–67.

[18] R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes*, Ann. Math. **116** (1982), 361–387.

[19] R. Coifman and Y. Meyer, *On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **212** (1975), 315–331.

[20] R. Coifman and Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque **57**, 1978.

[21] R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann. Math. **103** (1976), 611–635.

[22] R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math. **242**, Springer-Verlag, 1971.

[23] R. Coifman and G. Weiss, *Hardy spaces and their uses in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 569–645.

[24] G. David, *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **17** (1984), 157–189.

[25] G. David, *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaces*, Lecture Notes in Math. **1465**, Springer-Verlag, 1991.

[26] G. David and J.-L. Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. Math. **120** (1984), 371–397.

[27] G. David, J.-L. Journé and S. Semmes, *Opérateurs de Calderón-Zygmund , fonctions, para-accré et interpolation* , Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 1–56.

[28] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[29] L.C. Evans and S. Müller, *Hardy spaces and the two-dimensional Euler equations with nonnegative vorticity*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 199–219.

[30] C. Fefferman and E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137–193.

[31] M. Frazier, Y.-S. Han, B. Jawerth and G. Weiss, *The $T1$ Theorem for Triebel-Lizorkin spaces*, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Math. **1384**, J. García-Cuerva, ed., Springer-Verlag, 168–181.

[32] M. Frazier and B. Jawerth, *A Discrete Transform and Decompositions of Function Spaces*, J. Funct. Anal. **93** (1990), 34–170.

[33] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss, *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[34] J. García-Cuerva, *Hardy spaces and Beurling algebras*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 499–513.

[35] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math. Studies, **116**, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[36] J. García-Cuerva and M. L. Herrero, *A theory of Hardy spaces associated to the Herz spaces*, Proc. London Math. Soc. **69** (1994), 605–628.

[37] J. García-Cuerva and K. S. Kazarian, *Calderón–Zygmund operators and unconditional bases of weighted Hardy spaces*, Studia Math. **109** (1994), 255–276.

[38] J.E. Gilbert, Y.-S. Han, J.A. Hogan, J.D. Lakey, D. Wiland and G. Weiss, *Smooth Molecular Decompositions of Functions and Singular Integral Operators*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **742**, 2002.

[39] J.H. Gilbert and M. A.M. Murray, Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis, Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 26, Cambridge Univ. Press, 1991.

[40] D. Goldberg, *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. **46** (1979), 27–42.

[41] L. Grafakos, *Hardy space estimates for multilinear operators. II*, Rev. Mat. Iberoamericana **8** (1992), 69–92.

[42] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education Inc. 2004.

[43] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 415–426.

[44] J.-L. Journé, *Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón*, Lecture Notes in Math. **994**, Springer-Verlag, 1983.

[45] Y. Kanjin and M. Satake, *Inequalities for Discrete Hardy Spaces*, Acta Math. Hungar. **89** (2000), 301–313.

[46] M. Keitoku and E. Sato, *Block spaces on the unit sphere in R^n*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 453–455.

[47] C.E. Kenig, *Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. **83**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[48] Y. Komori, *Calderón-Zygmund operators on $H^p(R^n)$*, Sci. Math. Japonicae **53** (2001), 65–73.

[49] Y. Komori, *The atomic decomposition of molecule on discrete Hardy spaces*, Acta Math. Hungar. **95** (2002), 23–29.

[50] Y. Komori, *Weak type estimates for Calderón-Zygmund operators on Herz spaces at critical indexes*, Math. Nachr. **259** (2003), 42–50.

[51] Y. Komori, *Calderón-Zygmund operators on Herz-type Hardy spaces*, J. Math. Anal. Appl. **286** (2003), 80–88.

[52] Y. Komori, *Calderón-Zygmund operators on the predual of a Morrey space*, Acta Math. Sinica Engl. Ser. **19** (2003), 297–302.

[53] Y. Komori, *Notes on commutators on Herz-type spaces*, Archiv der Math. **81** (2003), 318–326.

[54] Y. Komori, *Calderón-Zygmund operators on weighted $H^p(R^n)$*, Hokkaido Math. J. **32** (2003), 673–684.

[55] Y. Komori, *Higher order commutators on $H^p(R^1)$*, Far East J. Math. Sci. **11** (2003), 303–309.

[56] Y. Komori, *Singular integrals on Lipschitz and Sobolev spaces*, Taiwanese J. Math. **9** (2005), 73–80.

[57] Y. Komori, *Singular integrals on discrete Besov space $B_1^{0,1}(Z)$*, Acta Math. Hungar. **108** (2005), 105–115.

[58] Y. Komori, *The Cauchy integral operators on Hardy space*, to appear in Hokkaido Math. J.

[59] Y. Komori, *Calderón's commutator and the double layer potential operator on Hardy space*, preprint.

[60] Y. Komori and T. Mizuhara, *Notes on commutators and Morrey spaces*, Hokkaido Math. J. **32** (2003), 345–353.

[61] Y. Komori and T. Mizuhara, *Factorization of functions in $H^1(\mathbb{R}^n)$ and generalized Morrey spaces* , Math. Nachr. **279** (2006), 619–624.

[62] Y. Komori and S. Shirai, *Weighted Morrey spaces and a singular integral operator* , to appear in Math. Nachr.

[63] R.H. Latter, *A decomposition of $H^p(R^n)$ in terms of atoms*, Studia Math. **62** (1977), 92–101.

[64] P.G. Lemarié, *Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **35** (1985), 175–187.

[65] J.L. Lewis and M.A.M. Murray, *The Method of Layer Potentials for the Heat Equation in Time-Varying Domains*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **545**, 1995.

[66] S.Z. Lu, *Four Lectures on Real H^p Spaces*, World Scientific, 1995.

[67] S.Z. Lu, M. H. Taibleson and G. Weiss, *Spaces Generated by Blocks*, Beijing Normal Univ. Press, Beijing, 1989.

[68] S.Z. Lu and D. Yang, *The local version of $H^p(R^n)$ spaces at the origin*, Studia Math. **116** (1995), 103–131.

[69] R.A. Macías and C. Segovia *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Advances in Math.**33** (1979), 257–270.

[70] R.A. Macías and C. Segovia *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Advances in Math.**33** (1979), 271–309.

[71] A. McIntosh and Y. Meyer, *Algèbres d'opérateurs définis par des intégrales singulières*, C.R. Acad. Sci. Paris **301** (1985), 395–397.

[72] Y. Meyer, *Continuite sur les espaces de Holder et de Sobolev des operateurs definis par des integrales singulieres*, Recent Progress in Fourier Analysis, Peral and Rubio de Francia, eds., North-Holland, 1985, 1451–172.

[73] Y. Meyer, *Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund*, Colloque en l'Honneur de L. Schwartz, Asterisque **131** (1985), 237–254.

[74] Y. Meyer, *Wavelets and operators, Analysis at Urbana*, London Math. Soc. Lecture Notes **137** (1989), 256–365.

[75] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **37**, Cambridge Univ. Press, 1995.

[76] Y. Meyer and R. Coifman, *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **48**, Cambridge Univ. Press, 1997.

[77] A. Miyachi, *Products of distributions in H^p spaces*, Tôhoku Math. J. **35** (1983), 483–498.

[78] A. Miyachi, *H^p spaces over open subsets of R^n*, Studia Math. **96** (1990), 205–228.

[79] A. Miyachi, *Hardy space estimates for the product of singular integrals*, Canad. J. Math. **52** (2000), 381–411.

[80] A. Miyachi, *Remarks on Herz-type Hardy spaces*, Acta Math. Sinica Engl. Ser. **17** (2001), 339–360.

[81] A. Miyachi, *A transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces*, Adv. Math. **184** (2004),177–206.

[82] T. Murai, *A real variable method for the Cauchy transform and analytic capacity*, Lecture Notes in Math. **1307**, Springer-Verlag, 1988.

[83] 中井英一, Fractional integral の最近の話題, 数学 **56** (2004), 260–280.

[84] T. Quek and D. Yang, *Calderón–Zygmund–type operators on weighted weak Hardy spaces over R^n*, Acta Math. Sinica, Engl. Ser. **16** (2000), 141–160.

[85] 佐藤秀一, 特異積分と Littlewood-Paley 関数, 数学 **55** (2003), 128–147.

[86] S. Shirai, *Necessary and sufficient conditions for boundedness of commutators of fractional integral operators on Morrey spaces with different indices*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 697–717.

[87] E. M. Stein, *Singular integrals, harmonic functions, and differentiability properties of functions of several variables*, Proc. Symp. Pure Math. (1967), 316–335.

[88] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[89] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[90] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[91] J. Strömberg and A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces*, Lecture Notes in Math. **1381**, Springer-Verlag, 1989.

[92] M. H. Taibleson and G. Weiss, *The molecular characterization of Hardy spaces*, Harmonic analysis in Euclidean spaces. Proc. Sympos. Pure Math. **35** (1979), 281–287.

[93] M. H. Taibleson and G. Weiss, *The molecular characterization of certain Hardy spaces*, Representation theorems for Hardy spaces. Asterisque **77** (1980), 67–149.

[94] M. H. Taibleson and G. Weiss, *Certain Function Spaces Connected with Almost Everywhere Convergence of Fourier Series*, Conference on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund, Vol. I, Wadsworth, 1983, 95–113.

[95] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, 1986.

[96] R.H. Torres, *Boundedness results for operators with singular kernels on distribution spaces*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **442**, 1991.

[97] 内山明人, BMO 関数について, 数学 **34** (1982) 317–330.

[98] A. Uchiyama, *Hardy Spaces on the Euclidean Space*, Springer-Verlag, 2001.

[99] K. Yabuta, *Generalizations of Calderon-Zygmund operators*, Studia Math. **82** (1985), 17–31.

[100] 山崎昌男, 種々の函数空間における Navier-Stokes 方程式, 数学 **51** (1999), 291–308.

付録 古典的 Hardy 空間から実解析的 Hardy 空間へ

定義 1(**古典的 Hardy 空間**, $0 < p < \infty$)

$$\mathbb{H}^p(R^2_+) \equiv \Big\{ F : R^2_+ \text{で正則};\ \|F\|_{\mathbb{H}^p} \equiv \sup_{y>0} \int_{R^1} \Big(|F(x+yi)|^p dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}.$$

$p \geq 1$ のときは以下のことが成り立つ.

定理 $F \in \mathbb{H}^p(R^2_+)$ $(1 \leq p < \infty)$ のとき $\lim_{y\to 0} F(x+yi) = F(x+0i)$ がほとんどすべての点で存在して, $z = x + yi$ としたとき

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R^1} \frac{F(t)}{t-z} dt, \quad y > 0,$$
$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{R^1} \frac{F(t)}{t-z} dt, \quad y < 0.$$

逆に $f \in L^p(R^1)$ $(1 \leq p < \infty)$ が

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{R^1} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0 \quad \text{for all} \quad y < 0 \quad \text{を満たすとき}$$

$F(z) \equiv \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{R^1} \frac{f(t)}{t-z} dt$ は上半平面で正則で $F \in \mathbb{H}^p(R^2_+)$, かつ $\lim_{y\to 0} F(x+yi) = f(x)$ a.e.
さらにこのとき $F(x+yi) = P_y * f(x)$, P_y は Poisson 核. かつ $\|F\|_{\mathbb{H}^p} = \|f\|_{L^p}$.

さらに次のような特徴づけもできる.

定理 実数値関数 $f \in L^p(R^1)$ $(1 \leq p < \infty)$ に対して, 上半平面の正則関数
$F(z) = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_{R^1} \frac{f(t)}{t-z} dt$ を考えると, その境界値は

$$F(x+0i) = f(x) + i\ Hf(x) \quad \text{a.e.} \qquad H \text{ はヒルベルト変換.}$$

さらに Re $F(z) = P_y * f(x)$,

$$\text{Im } F(z) = P_y * Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{R^1} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt \qquad \text{(共役関数)}$$

そして $\|F\|_{\mathbb{H}^p} = \|f + i\ Hf\|_{L^p}$.
とくに $1 < p < \infty$ のときは ヒルベルト変換の L^p 有界性より $\|F\|_{H^p} \approx \|f\|_{L^p}$.
$p = 1$ のときは $\|F\|_{\mathbb{H}^1} \approx \|f\|_{L^1} + \|Hf\|_{L^1}$.

この事実より**実 Hardy 空間** $H^1(R^1)$ を次のように定義する.

定義 2

$$H^1(R^1) = \{ f \in L^1(R^1); \|f\|_{H^1} \equiv \|f\|_{L^1} + \|Hf\|_{L^1} < \infty \}.$$

注意：この定義自体は複素数値関数でも構わない.

この定義を R^n と $p<1$ の場合に拡張したい．最終的にこの目的が達成されたのが Fefferman and Stein, Acta (1972) である．

上記の定理の証明で最も基本となるのは平均値の定理から導かれる次の不等式である．

$$|f(z_0)|^p \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} |f(z)|^p dxdy.$$

これは「f: 正則ならば $|f|^p$ 劣調和」のことであり，この命題は $0<p<1$ でも成り立つ．しかし正則性に依存していると R^n に拡張することは難しい．

ところが以下の重要な不等式がある（Hardy-Littlewood）

u が調和関数のとき

$$|u(z_0)|^p \leq \frac{C_p}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} |u(z)|^p dxdy.$$

この不等式は $p \geq 1$ のときは $|u|^p$ 劣調和だから $C_p = 1$ で成り立つが $p<1$ でも同様な不等式が成り立つことが重要.

このことを手がかりとして上半空間 R_+^{n+1} の調和関数を使って Hardy 空間を定義することが出来るようになった（Stein and Weiss, Acta (1960)）.

定義 3(調和関数を用いた Hardy 空間, $0<p<\infty$)

$u^+(x) \equiv \sup_{y>0} |u(x,y)|$.

$$\mathcal{H}^p(R_+^{n+1}) \equiv \Big\{ u : R_+^{n+1}\text{で調和};\ \|u\|_{\mathcal{H}^p} \equiv \Big(\int_{R^n} u^+(x)^p dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}.$$

$\mathcal{H}^p(R^n)$ は $p=1$ の場合は，一般化された Cauchy-Rieman の関係式をつかって定義 2 と同様に境界関数と Riesz 変換 R_j を使って特徴づけできる．

定義 4

$$\mathcal{H}^1(R^n) = \{ f \in L^1(R^n); \|f\|_{\mathcal{H}^n} \equiv \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1} < \infty \}.$$

この段階では $p<1$ の場合には境界関数による $\mathcal{H}^p(R^n)$ の特徴づけが出来ていない.

この問題を解決するには調和関数と使わないで Hardy 空間を特徴付けることが必要であり，Fefferman and Stein による．

定義 5(実解析的 Hardy 空間, $0<p<\infty$)

$\varphi \in \mathcal{S}, \int \varphi(x)dx = 1$ を固定する．$M_\varphi f(x) \equiv \sup_{y>0} |\varphi_y * f(x)|$.

$$H^p(R^n) \equiv \Big\{ \varphi \in \mathcal{S}' :\ \|f\|_{H^p} \equiv \Big(\int_{R^n} M_\varphi f(x)^p dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}.$$

注意： H^p は φ の選択によらない.