拡散及び分散型単独保存則の特異摂動問題について

藤野 直樹*

本公演は [2] の研究に基づく．空間 1 次元の拡散及び分散型単独保存則の初期値問題

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_x (\partial_x u)^{2\ell-1} - \delta \partial_x^2 (\partial_x u)^{2\ell-1}, \quad (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty), \tag{1}$$
$$u(x,0) = u_0^\varepsilon(x), \quad x \in \mathbf{R} \tag{2}$$

を考察する．ここで $\ell \geq 1$ とする．この初期値問題 (1),(2) に対して，ε, $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0+$ とした特異極限の近似解の列が双曲型保存則の初期値問題

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty), \tag{3}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R} \tag{4}$$

の一意エントロピー解に収束することを証明する．この収束性を示すために，滑らかでコンパクトな台をもつ初期値に関して

$$\exists u_0 \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^q(\mathbf{R}),\ \forall q > 1 \text{ s.t. } \lim_{\varepsilon \to 0} u_0^\varepsilon = u_0 \text{ in } L^1(\mathbf{R}) \cap L^q(\mathbf{R}) \tag{5}$$

を仮定する．さらに次の一様有界性についても仮定する：

$$||u_0^\varepsilon||_{L^2(\mathbf{R})} + ||u_0^\varepsilon||_{L^q(\mathbf{R})} + \delta^{\frac{1}{2\ell}} ||u_{0,x}^\varepsilon||_{L^{2\ell}(\mathbf{R})} \leq C_0 \text{ for } q \in \left(\frac{3\ell - 1}{\ell}, \frac{3\ell^2 + 2\ell - 1}{\ell} \right). \tag{6}$$

一方，流速密度 (flux) は滑らかで，増大条件

(I) $$\exists C_1 > 0,\ m > 1 \text{ s.t. } |f'(u)| \leq C_1(1 + |u|^{m-1}) \text{ for any } u \in \mathbf{R}$$

をみたすとする．このとき，以下の主定理が成り立つ：

Theorem 1. 流速 $f(u)$ は増大条件 *(I)* をみたし，$q > m \left(q \in \left[\frac{3\ell^2+3\ell-1}{2\ell}, 3\ell \right] \right)$ に対して初期値が *(5),(6)* をみたすとする．このとき，$\delta = O\left(\varepsilon^{\frac{(\ell+1)(6\ell-m-1)}{2(3\ell^2 - m\ell - q\ell + 3\ell - 1)}} \right)$ ならば，初期値問題 *(1),(2)* の近似解の列 $\{u^\varepsilon\}$ は初期値問題 *(3),(4)* の一意エントロピー解 $u \in L^\infty((0,T^*); L^q(\mathbf{R}))$ に $L^k((0,T^*); L^p(\mathbf{R}))$ $(\forall k < \infty$ *and* $\forall p < q)$ で収束する．

この主定理を Young 測度，エントロピー測度値解，補償コンパクト性理論を用いて証明する．

弱解，エントロピー解は次で定義される．

Definition 2. *1). u が弱解 (weak solution) $\Leftrightarrow^{\text{def}}$ for $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times [0,T))$ s.t.*

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} (\varphi_t u + \varphi_x f(u))\, dxdt + \int_{\mathbf{R}} u_0(x) \varphi(x,0) dx = 0.$$

2). 弱解 u がエントロピー解 (entropy solution) $\Leftrightarrow^{\text{def}}$ for $\forall (E,F)$ convex entropy pair ,$\forall \varphi \geq 0$ s.t.

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} (\varphi_t E(u) + \varphi_x F(u))\, dxdt + \int_{\mathbf{R}} E(u_0(x))\, \varphi(x,0) \geq 0.$$

エントロピー解について，以下の同値性が成り立つ：

*東京大学大学院数理科学研究科 & 筑波大学大学院数理物質科学研究科

Proposition 3. $u : \mathbf{R} \times (0,T) \to \mathbf{R}$ が有界，可測であるとする．このとき，u がエントロピー解 $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi \geq 0$,

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} \{\varphi_t \, |u-k| + \varphi_x \, (f(u) - f(k)) \, \mathrm{sgn}(u-k)\} \, dxdt + \int_{\mathbf{R}} |u_0(x) - k| \, \varphi(x,0) \geq 0, \ \forall k \in \mathbf{R}.$$

次に Young 測度，測度値解を導入する．

Definition and Proposition 4. $\{u^\varepsilon\} \subseteq L^\infty((0,\infty); L^q(\mathbf{R}))$ が有界であり，任意の $g \in C(\mathbf{R})$ が $q' \in (0,q)$, $C > 0$ に対して

$$|g| \leq C(1 + |u|^{q'}) \tag{7}$$

をみたすとする．このとき，次が成り立つような部分列 $\{u^{\varepsilon'}\}$ と汎弱可測写像 $\nu : \mathbf{R} \times (0,\infty) \to \mathrm{Prob}(\mathbf{R})$ が存在する：

$$g(u^{\varepsilon'}) \to \langle \nu_{(x,t)}, g \rangle := \int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_{(x,t)}(\lambda) \ \ as \ \varepsilon' \to 0$$

in $L^s(\mathbf{R} \times (0,\infty))$ *for any* $s \in (1, q/q')$．この $\nu_{(x,t)}$ を部分列 $\{u^{\varepsilon'}\}$ に対する *Young* 測度 *(Young measure)* という．

Definition 5. $f \in C(\mathbf{R})$ が不等式 (7) をみたし，$u_0 \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^q(\mathbf{R})$ とする．このとき，部分列 $\{u^{\varepsilon'}\}$ に対する *Young* 測度 ν が初期値問題 *(3), (4)* に対するエントロピー測度値解 *(entropy measure-valued solution)* であるとは

$$\partial_t \langle \nu_{(x,t)}(\lambda), \ |\lambda - k| \rangle + \partial_x \langle \nu_{(x,t)}(\lambda), \ \mathrm{sgn}(\lambda - k)(f(\lambda) - f(k)) \rangle \leq 0 \ \ for \ \forall k \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{T \to 0^+} \frac{1}{T} \int_0^T \int_K \langle \nu_{(x,t)}(\lambda), |\lambda - u_0(x)| \rangle dxdt = 0 \ \ for \ any \ compact \ set \ K \subseteq \mathbf{R}$$

が成り立つときである．

測度値解の一意性より部分列をとる必要性がないことに注意すると非常に有用となる以下の収束定理が成立：

Theorem 6 (LeFloch-Natalini)**.** f が増大条件 (7) をみたし，$q \geq 1$ に対して $u_0 \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^q(\mathbf{R})$ とする．また，ν を一様有界列 $\{u^\varepsilon\} \subseteq L^\infty((0,\infty); L^q(\mathbf{R}))$ に対する *Young* 測度とする．ν が初期値問題 (3),(4) のエントロピー測度値解ならば

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon = u \quad in \ L^\infty((0,\infty); L^{q'}_{loc}(\mathbf{R})) \ for \ any \ q' \in [1,q),$$

が成り立つ．ここで，$u \in L^\infty((0,\infty); L^q(\mathbf{R}))$ は初期値問題 (3),(4) の一意エントロピー解である．

Theorem 6 を適用するために次の a priori 評価を導く：

Lemma 7. *For every* $T \in (0, T^*)$,

$$\int_{\mathbf{R}} u^2(x,T) dx + 2\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbf{R}} u_x^{2\ell}(x,t) dxdt \leq C_0.$$

Moreover for $m \in (1, 6\ell - 1)$

$$\sup_{t \in (0,T^*)} ||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq C \delta^{-\frac{1}{6\ell - m - 1}},$$

$$\int_{\mathbf{R}} u_x(x,T)^{2\ell} dx + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbf{R}} u_x^{2(2\ell-2)} u_{xx}^2 dxdt \leq C \delta^{-\frac{2(3\ell-1)}{6\ell - m - 1}}.$$

Lemma 7 より初期値問題 (1),(2) の近似解に対する有界性が成立：

Proposition 8. $m < \frac{3\ell^2 - q\ell + 3\ell - 1}{\ell}$ $\left(q \in \left(\frac{3\ell - 1}{\ell}, \frac{3\ell^2 + 2\ell - 1}{\ell}\right), \ \ell \geq 1\right)$ に対して，増大条件 *(I)* と初期値の一様有界性 (6) を仮定する．このとき，$\delta = O\left(\varepsilon^{\frac{(\ell+1)(6\ell - m - 1)}{2(3\ell^2 - m\ell - q\ell + 3\ell - 1)}}\right)$ ならば，初期値問題 (1),(2) の近似解の列 $\{u^\varepsilon\}$ は $t \in (0, T^*)$ に関して $L^q(\mathbf{R})$ で一様に有界である．

この L^q 有界性から $\{u^\varepsilon\}$ に対する Young 測度 ν が存在する．また，この Young 測度 ν が初期値問題 (3),(4) のエントロピー測度値解であることも Lemma 7 を用いて証明される．よって，LeFloch–Natalini の収束定理 (Theorem 6) を適用し，主定理 (Theorem 1) が導かれる．

References

[1] DiPerna R.J., Measure-valued solutions to conservation laws, Arch. Rational Mech. Anal., **88** (1985), 223–270.

[2] Fujino N., Scalar conservation laws with vanishing and highly nonlinear diffusive-dispersive terms, to appear in Publications of RIMS, Kyoto University.

[3] Fujino N. and Yamazaki M., A convergence result on the Burgers equation of conservation laws, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications I, Tenth International Conference in Osaka, Yokohama Publishers, (2006) 407–414.

[4] Fujino N. and Yamazaki M., Hyperbolic conservation laws with nonlinear diffusion and nonlinear dispersion, J. Differential Equations, **228** (2006), 171–190.

[5] Fujino N. and Yamazaki M., A result on the equation of conservation laws having second and third order terms, Nonlineear Dispersive Equations, Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, **26** (2006), 19–34.

[6] Fujino N. and Yamazaki M., Burgers' type equation with vanishing higher order, Commun. Pur. Appl. Anal. **6** (2007), 505–520.

[7] Fujino N. and Yamazaki M., Vanishing at most seventh order terms of scalar conservation laws, to appear in Proceedings of the Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems 2006, Springer-Verlag.

[8] C.I. Kondo and P.G. LeFloch, Zero diffusion-dispersion limits for scalar conservation laws, SIAM J. Math. Anal., **33** (2002), 1320–1329.

[9] Lax P.D. and Levermore C.D., The zero dispersion limit for the Korteweg de Vries KdV equation, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., **76** (1979), no. 8, 3602–3606.

[10] Lax P.D. and Levermore C.D., The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation, Commun. Pur. Appl. Math., **36** (1983) I, 253–290, II, 571–593, III, 809–829.

[11] LeFloch P.G. and Natalini R., Conservation laws with vanishing nonlinear diffusion and dispersion, Nonlinear Anal., **36** (1999), 213–230.

[12] Schonbek M.E., Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations, Comm. Partial Differential Equations, **7** (1982), 959–1000.

[13] Szepessy A., An existence results for scalar conservation laws using measure valued solutions, Comm. Partial Differential Equations, **14** (1989), 1329–1350.