非有界領域における Navier-Stokes 方程式の弱解の正則性について

鈴木 友之 (大阪大学大学院理学研究科)

本講演では, 次の Navier-Stokes 方程式を考える:

$$
\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}
$$

ここで, $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, $p = p(x,t)$ はそれぞれ速度および圧力を表す未知関数であり, $u_0 = u_0(x)$ は与えられた初期速度である. また, Ω は $\mathbb{R}^3$ の一様 C^2 級領域, 特に非有界領域で境界がコンパクトでない領域を考える. 詳しい定義や性質などは Sohr [5, p.26] を参照されたい.

我々は, (N-S) の弱解 $u(x,t)$ の正則性を十分大きい $|x|$ に対し考察する. 空間遠方における正則性は, Caffarelli-Kohn-Nirenberg [2] が $\mathbb{R}^3$ において, Sohr-von Wahl [6] が外部領域において証明している. どちらの結果にも共通している点として, "suitable weak solution" なる弱解を扱っていることが挙げられる.

我々は, 一般の非有界領域において次の結果を得た.

定理 $u_0 \in L^2(\Omega)$ かつ (u,p) を $\Omega \times (0,T)$ における "suitable weak solution" とする. この時, 任意の $\delta > 0$ に対しコンパクト集合 K_δ が存在して $u(x,t)$ は $(\overline{\Omega} \setminus K_\delta) \times (\delta, T)$ 上 Hölder 連続である.

注意 **(i)** 一般に境界の近くでは解の滑らかさが失われる可能性がある. 我々の状況では遠方まで境界が存在し続けているが, 定理より十分遠方では境界からの影響は無視でき境界の近くでも正則性が得られることがわかる.
(ii) "suitable weak solution" は "一般化されたエネルギー不等式" を満たし, 圧力項 p の可積分性を仮定した弱解である. 実際, Caffarelli-Kohn-Nirenberg では $p \in L^{5/4}(\Omega \times (0,T))$, F.-H.Lin では $p \in L^{3/2}(\Omega \times (0,T))$ を仮定している. 定理で用いた "suitable weak solution" では $\nabla p \in L^{5/4}(\Omega \times (0,T))$ を課している. 特に, ここでの "suitable weak solution" を "interior suitable weak solution" と呼ぶことにする.

"interior suitable weak solution" を用いることによる最大の利点は, 次の ε 正則性定理が成立することである.

補題 1 (F.-H.Lin [3]) ある定数 ε_0 が存在して, "interior suitable weak solution" が

$$\frac{1}{r^2}\iint_{Q_r(x_0,t_0)}\left(|u|^3+|p|^{3/2}\right)\,dxdt<\varepsilon_0 \tag{1}$$

を満たせば, u は $Q_{r/2}(x_0,t_0)$ において Hölder 連続である. ただし, $Q_r(x_0,t_0)=B_r(x_0)\times(t_0-r^2,t_0)$ とする.

もし圧力の領域全体における可積分性がわかれば, 補題 1 において中心 x_0 を十分大きく取ることにより, (1) の積分をいくらでも小さくすることができる. 実際, $\mathbb{R}^3$ においては (N-S) に "div"を施すことにより $p\in L^{5/3}(\mathbb{R}^3\times(0,T))$ が, 外部領域においては最大正則性定理により $p\in L^{5/4}(\delta,T;L^{15/7}(\Omega)),\forall\delta>0$, を示すことができる.

一般の非有界領域における難しさは, その形状に依存して楕円型方程式の解の存在や一意性が失われることにより L^q 理論が成立しないことである. 最近, Farwig-Kozono-Sohr [1] は L^q 空間を修正することにより, 一様 C^2 級領域における L^q 理論 (Helmholtz 分解, レゾルベント評価, 最大正則性定理) を証明した. ここで, 彼らの最大正則性定理を用いると

$$\nabla p\in L^{5/4}(\delta,T;L^{5/4}+L^2) \tag{2}$$

が得られるが, 境界がコンパクトでないために p 自身の情報を得ることは難しい. したがって, 我々は補題 1 を次の形に修正する.

命題 2 ある定数 ε_0 が存在して, "interior suitable weak solution" が

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\iint_{Q_r(x_0,t_0)}|u|^3\,dxdt+\frac{1}{r^3}\int_{t_0-r^2}^{t_0}\left(\int_{B_r(x_0)}|u|^{5/2}\,dx\right)^2dt\\+\frac{1}{r^{5/4}}\iint_{Q_r(x_0,t_0)}|\nabla p|^{5/4}\,dxdt<\varepsilon_0\end{aligned} \tag{3}$$

を満たせば, u は $Q_{r/2}(x_0,t_0)$ において Hölder 連続である.

命題 2 と (2) により, $|x_0|$ を十分大きくとると (3) に現れる積分を小さくすることができる. しかしながら, 補題 1 と命題 2 は領域 $Q_r(x_0,t_0)$ が境界と交わらない場合にのみ成り立つ. したがって, 境界付近の正則性は別に扱わなければならない.

境界付近での解析のために, Seregin-Shilkin-Solonnikov [4] による"boundary suitable weak solution"を用いる. 前述の "interior suitable weak solution"では $\nabla p\in L^{5/4}(\Omega\times$

$(0,T))$ を課したが, それに加え $\nabla^2 u \in L^{5/4}(\Omega \times (0,T))$ も課す. 補題 1 に対応する境界における ε 正則性定理が成り立つ.

補題 3 (Seregin-Shilkin-Solonnikov [4]) ある $\varepsilon_1, R_1 > 0$ が存在して, "boundary suitable weak solution" が $x_0 \in \partial\Omega$ に対し

$$\frac{1}{R_1^2} \iint_{Q^+_{R_1}(x_0,t_0)} \left(|u|^3 + |p|^{3/2}\right) dxdt < \varepsilon_1$$

を満たせば, u は $Q^+_{R_1/2}(x_0,t_0)$ 上 Hölder 連続である. ただし, $Q^+_{R_1} := (B_{R_1}(x_0) \cap \Omega) \times (t_0 - R_1^2, t_0)$ とする.

命題 2 と同様に, 補題 3 の ∇p による定式化を行う.

命題 4 ある $\varepsilon_1, R_1 > 0$ が存在して, "boundary suitable weak solution" が $x_0 \in \partial\Omega$ に対し

$$\frac{1}{R_1^2} \iint_{Q^+_{R_1}(x_0,t_0)} |u|^3 \, dxdt + \frac{1}{R_1^3} \int_{t_0 - R_1^2}^{t_0} \left(\int_{B^+_{R_1}(x_0)} |u|^{5/2} \, dx \right)^2 dt + \frac{1}{R_1^{5/4}} \iint_{Q^+_{R_1}(x_0,t_0)} |\nabla p|^{5/4} \, dxdt < \varepsilon_1$$

を満たせば, u は $Q^+_{R_1/4}(x_0,t_0)$ 上 Hölder 連続である. ただし, $B^+_{R_1}(x_0) := B_{R_1}(x_0) \cap \Omega, Q^+_{R_1} := B^+_{R_1}(x_0) \times (t_0 - R_1^2, t_0)$ とする.

定理の証明は命題 2 と命題 4 を組み合わせればよい. 実際, 命題 4 により境界から $R_1/4$ の距離の領域における正則性が得られ, 残った Ω の内部は命題 2 において適当に r を取ることにより覆うことができる.

注意 定理における "suitable weak solution" という仮定は, "interior" かつ "boundary suitable weak solution" を意味している. つまり, $\nabla p, \nabla^2 u \in L^{5/4}(\Omega \times (0,T))$ を仮定している. しかしながら, 平滑化効果によりすべての $\delta > 0$ に対し弱解 u は (δ, T) 上でこの仮定を満たすことが示される. したがって, "一般化されたエネルギー不等式" が本質的な仮定である.

参考文献

[1] Farwig, R., Kozono, H., Sohr, H., *An L^q-approach to Stokes and Navier-Stokes equations in general domains,* Acta Math. **195**, 21-53 (2005).

[2] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L., *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations,* Comm. Pure Appl. Math. **35**, 771-831 (1982)

[3] Lin, F.-H., *A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem.* Comm. Pure Appl. Math. **51**, 241-257 (1998).

[4] Seregin, G. A., Shilkin, T. N., Solonnikov, V. A., *Partial boundary regularity for the Navier-Stokes equations,* J. Math. Sci. **132**, 339-358 (2006).

[5] Sohr, H., *The Navier-Stokes equations.* Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser, 2001.

[6] Sohr, H., von Wahl, W., *A new proof of Leray's structure theorem and the smoothness of weak solutions of Navier-Stokes equations for large $|x|$,* Bayreuther Math. Schr. **20**, 153-204 (1985).

[7] Suzuki, T., *On the boundedness of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations in unbounded domains,* preprint