ヒステレシスを持つある梁の方程式の弱解の可解性について

吉川周二 (宇部工業高等専門学校)

本講演では, 金属変位 u と応力 σ に対する, 次の方程式を考察する.

$$
(P)\begin{cases}
u_{tt} + u_{xxxx} = \sigma_x, & \\
\sigma_t - \kappa\sigma_{xx} + \partial I(\sigma; u_x) \ni c u_{tx}, & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,l), \\
u = u_{xx} = \sigma_x = 0, & (t,x) \in [0,\infty) \times \{0,l\}, \\
u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1, \quad \sigma(0,\cdot) = \sigma_0, & x \in (0,l).
\end{cases}
$$

この方程式は, Aiki-Kenmochi([2]) によって考察されたヒステレシス効果を含む形状記憶合金方程式において, 温度が一様に分布していると仮定した方程式である.

この方程式ではヒステレシス効果を第二方程式で表現している. ここで I は指示関数:

$$
I(\sigma; u_x) = \begin{cases}
0 & \sigma \in [f_l(u_x), f_u(u_x)], \\
\infty & \text{otherwise},
\end{cases}
$$

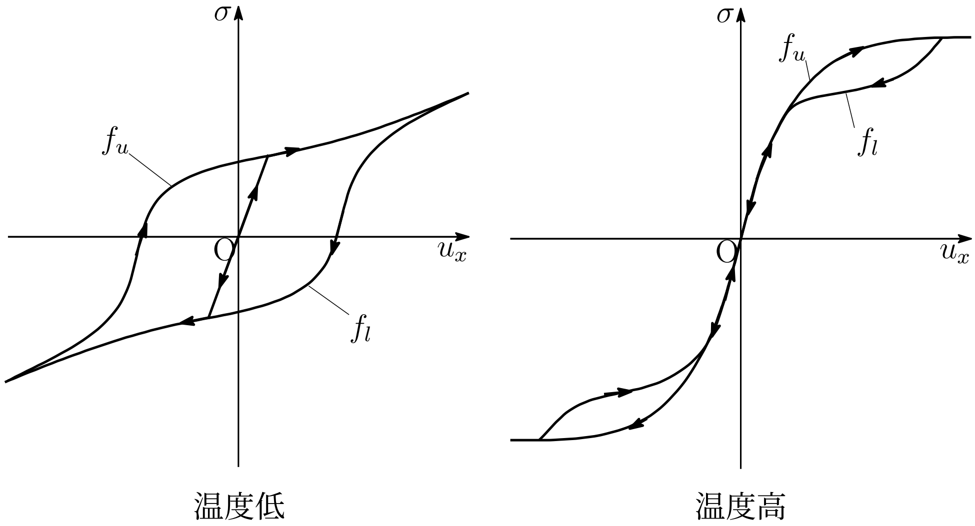
であり, その劣微分 ∂I は

$$
\partial I(\sigma; u_x) = \begin{cases}
[0,\infty) & \sigma = f_u(u_x), \\
0 & \sigma \in (f_l(u_x), f_u(u_x)), \\
(-\infty, 0] & \sigma = f_l(u_x),
\end{cases}
$$

となる. また, $c > 0$ と $\kappa > 0$ は正定数, 関数 f_l, f_u は次の条件を満たすものとする:

$$
f_l, f_u \in W^{1,\infty}, \quad f_l \leq f_u, \quad f_l', f_u' \in [0, c). \tag{1}
$$

形状記憶合金の場合, 金属の応力 σ と歪み u_x の関係は下図のようなヒステレシスループに従うことが知られている.



このヒステレシスループを多項式で近似的に表現したものが, Falk モデルと呼ばれるものであり, この方程式については多くの研究結果が知られている．特に形状記憶合金の物理的な取り扱いや, Falk モデルの導出については, Brokate-Sprekels の文献 [3] が詳しい.

ところで，より正確に現象を表現するためには，このヒステレシス現象を，多項式よりも正確に表現する方法を考える必要がある．このようなヒステレシス現象を付与した方程式としては, Krejčí-Sprekels([5]) によるものと，Aiki-Kenmochi([1], [2]) によるものが知られている．しかしこれらのどちらの結果でも, 第一方程式は内部粘性を付与した方程式:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{txx} = \sigma_x$$

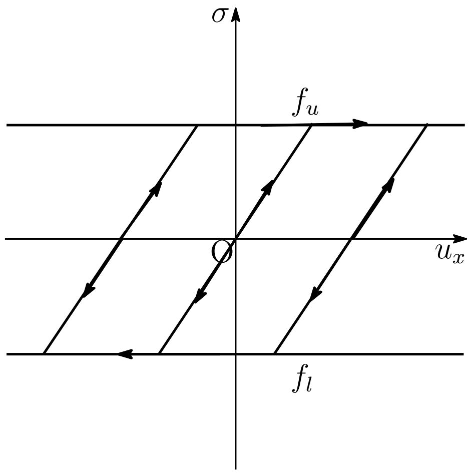
である．この方程式は放物型方程式であるのに対して, (P) の第一方程式は梁の方程式やビーム方程式と呼ばれる分散型方程式である. この方程式はシュレディンガー方程式とよく似た性質をもつ方程式であり, 放物型方程式のように強い平滑化作用がないことに注意したい．Krejčí-Sprekels は [4] で粘性のつかない方程式に対して解の存在を示しているが, 一意性については未解決である.

そこで, まず温度分布が一様の仮定のもとではより詳しく方程式の情報を得ることが出来るのではないだろうかと考え, 本研究を行い以下の結果を得た.

定理 1. 時間 $T > 0$ を固定する．関数 f_l, f_u が条件 (1) を満たすとする．条件 $\sigma_0 \in (f_l(\partial_x u_0), f_u(\partial_x u_0))$ を満たす任意の初期値 $(u_0, u_1, \sigma_0) \in H^3 \times H^1 \times H^1$ に対して, 次を満たす方程式 (P) の解 (u, σ) が唯一つ存在する:

$$u \in L^\infty(0,T;H^3), \qquad u_t \in L^\infty(0,T;H^1),$$
$$\sigma \in L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2) \cap W^{1,2}(0,T;L^2).$$

注意. 方程式 (P) において, 応力 σ に対する方程式 (第二方程式) の平滑化項 $-\kappa\sigma_{xx}$ はついていない方が自然である. 非線形項 f_l, f_u が $f_u(u_x) = -f_l(u_x) = C$(定数) の時については, この平滑化項がとれる (即ち $\kappa = 0$) が, 一般の場合については現在までのところ自分には示すことが出来ていない.



参考文献

[1] T. Aiki, A. Kadoya and S. Yoshikawa, Hysteresis model for one-dimensional shape memory alloy with small viscosity, Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena: Modelling, Analysis and Simulations, 1–8, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **23**, Gakkotosho, Tokyo, 2005.

[2] T. Aiki and N. Kenmochi, Models for shape memory alloys described by subdifferentials of indicator functions, Elliptic and parabolic problems (Rolduc/Gaeta, 2001), 1–10, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.

[3] M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and phase transitions*, Appl. Math. Sci. **121**, Springer, Berlin, 1996.

[4] P. Krejčí and J. Sprekels, On a system of nonlinear PDEs with temperature-dependent hysteresis in one-dimensional thermoplasticity, J. Math. Anal. Appl. **209** (1997), 25–46.

[5] P. Krejčí and J. Sprekels, Temperature-dependent hysteresis in one-dimensional thermovisco-elastoplasticity, Appl. Math. **43** (1998), 173–205.