勾配・歪勾配構造をもつ反応拡散系について

神戸大学発達科学部

桑村雅隆[1]

反応拡散方程式系とは、拡散方程式に反応項がついたタイプの微分方程式を n 個組み合わせたものである。

$$(1) \qquad Tu_t = D \triangle u + f(u), \quad u = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \quad x \in \mathbf{R}^N$$

ここで、反応項 $f(u)$ は各成分間の相互作用を記述する非線形項である。(1) は次の３つの条件をみたすとき、勾配・歪勾配構造を持つという [3]。

・T は非負対角行列である。
・D は正則行列であって、条件 $(QD)^T = QD$ をみたす。
　ここで、Q は対称行列で $Q^2 = I_n$ をみたす。
・(1) の非線形項は $f(u) = Q\nabla_u F(u)$ であるとする。
　ただし、$F = F(u) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は十分なめらかとする。

このとき、(1) は (歪) エネルギー関数

$$\mathcal{E}[u] = \int \left\{ \frac{1}{2} \langle\!\langle D\nabla u, Q\nabla u \rangle\!\rangle - H(u) \right\} dx,$$

をもつ。ここで、

$$\langle\!\langle D\nabla u, Q\nabla u \rangle\!\rangle := \sum_{i,j} d_{ij} \nabla u_j \cdot q_{ij} \nabla u_j$$

である。実際、簡単な計算により

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}[u(x,t)] = -\int \langle u_t, QTu_t \rangle \, dx$$

が成り立つことが確かめられる。ただし、$\langle \; , \; \rangle$ は通常の $\mathbf{R}^n$ 上のユークリッド内積を表す。(1) は QT が非負のとき勾配構造をもつという。そうでないときは歪勾配構造をもつという。

[1] kuwamura@main.h.kobe-u.ac.jp

歪勾配構造の概念は、FitzHugh-Nagumo 型の反応拡散方程式に現れる定常パルス解の安定性を調べるために [1] で導入され、[3] において上のような一般的な形で定式化された。ここでは、勾配・歪勾配構造をもつ反応拡散方程式系についてのサーベイを次の４つに分けて行いたい。

(i) 定常パルス解の安定性 [1]
(ii) 空間周期解の安定性 [3],[4]
(iii) 特異摂動問題 [5]
(iv) 多次元の問題 [2]

(i) と (ii) では、勾配・歪勾配構造をもつ反応拡散方程式系の「対称性」が重要な役割を果たす。つまり、定常解のまわりの線形化固有値問題が対称性をもっており、adjoint eigenvector が簡単に求められることが本質的である。

(iii) では、異なる領域で構成した定常解をつなぐときに現れる matching condition が、(歪) エネルギー関数を用いて表されることが重要である。その結果、定常解の安定性が (歪) エネルギー関数の凹凸で決まるということがわかる。

(iv) では、定常解の安定性を決める critical な固有値の挙動が、通常の変分原理を拡張した mini-maximizing property によって特徴づけられるということが重要な役割を果たしている。

[1] E. Yanagida, Standing pulse solutions in reaction-diffusion systems with skew-gradient structure, J. Dynam. Differential Equations **4** (2000), pp.89-205.
[2] E. Yanagida, Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure, J. Differential Equations **179** (2002), pp.311-335.
[3] M. Kuwamura and E. Yanagida, The Eckhaus and zigzag instability criteria in gradient/skew-gradient dissipative systems, Physica D **175** (2003) pp.185-195.
[4] M. Kuwamura, On the Turing patterns in one-dimensional gradient/skew-gradient dissipative systems, SIAM J. Appl. Math. **65** (2005) pp.618-643.
[5] S.-I. Ei, M. Kuwamura and Y. Morita, A variational approach to singular perturbation problems in reaction-diffusion systems, Physica D **207** (2005) pp.171-219.