Diffusion with a stationary level surface

坂口 茂 （愛媛大・理）

2006 年 12 月 2 日

この話は R. Magnanini（Firenze 大学）との共同研究 [MS3] による。$\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 2)$ の C^2 級の外部領域 Ω において, $u = u(x,t)$ を次の非線形拡散方程式の初期境界値問題の有界な一意解とする。

$$u_t = \Delta\phi(u) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u = 1 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{2}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\}. \tag{3}$$

ここで, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^2 級で, $\phi(0) = 0$ および 2 つの正定数 $0 < \delta_1 \leqq \delta_2$ について

$$\delta_1 \leqq \phi'(s) \leqq \delta_2 \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

を満たすとする。従って, 方程式 (1) は一様放物型の非線形拡散方程式である。最大値の原理から $0 < u(x,t) < 1$ $(x \in \Omega,\ t > 0)$ が成り立つ。関数 $\Phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$\Phi(s) = \int_1^s \frac{\phi'(\xi)}{\xi} d\xi \qquad (s > 0) \tag{5}$$

によって定める。$\phi(s) \equiv s$ のときは, $\Phi(s) \equiv \log s$ であって, 熱方程式の場合に対応している。境界への距離関数 $d(x) =$ dist $(x, \partial\Omega)$ について, 線形方程式の場合の Varadhan [Va] の結果に対応する非線形の場合の結果は次である。

定理 1 $\quad -4t\Phi(u(x,t)) \to d(x)^2$ *as* $t \to +0$ *uniformly on every compact set in* Ω.

定理 1 と Aleksandrov の折り返しの方法（[Sir]）を合わせると, 熱方程式に対する結果 ([MS2], [MS1]) に対応する非線形拡散方程式の結果として, 次の定理を示すことができる。

定理 2 $\quad \Omega$ を $\mathbb{R}^N$ $(N \geqq 2)$ の C^2 級の外部領域とし, u を (1)-(3) の有界な一意解とする。$\mathbb{R}^N$ の C^2 級の外部領域 D が $\overline{D} \subset \Omega$ を満たし, ∂D が常に u の等位面であるとする。つまり,

$$u(x,t) = a(t) \quad ((x,t) \in \partial D \times (0,\infty)) \tag{6}$$

を満たす関数 $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在すると仮定する。このとき, $\partial\Omega$ は一つの球面に限る。

注意 3 上記の定理 1 および定理 2 と同様な定理がもちろん Ω が有界な C^2 級領域の場合にも成り立つ。また, 初期関数を Ω の補集合の特性関数とする $\mathbb{R}^N$ 上の *Cauchy* 問題についても対応する定理が成り立つ。([MS3] を参照)

定理 2 の証明は定理 1 から $\partial\Omega$ と ∂D が平行になることを導き, さらに Aleksandrov の折り返しの方法([Sir] 参照)を直接初期境界値問題 (1)-(3) に適用することによって得られる。

ここでは, 定理 1 の証明の概略を述べよう。粘性解の理論([CrIL] を参照)を用いて示すことができる。[FW] や [EI] のように, パラメータ $\varepsilon > 0$ を導入し, 関数

$$v^\varepsilon(x,t) = -\varepsilon^2\Phi(u(x,\varepsilon^2 t)) \qquad (x \in \Omega, t > 0) \tag{7}$$

を考える。v^ε は次を満たす。

$$v_t^\varepsilon = \varepsilon^2\phi'\Delta v^\varepsilon - |\nabla v^\varepsilon|^2 \quad \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \tag{8}$$
$$v^\varepsilon = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \tag{9}$$
$$v^\varepsilon = +\infty \quad \text{on} \quad \Omega\times\{0\}. \tag{10}$$

ここで, $\phi' = \phi'\left(\Phi^{-1}\left(-\varepsilon^{-2}v^\varepsilon\right)\right)$ である。$h > 0$ について, $u(x,t+h)$ と $u(x,t)$ に比較定理を用いて

$$u_t > 0 \ \text{ and } \ \Delta\phi(u) > 0 \ \text{ in } \ \Omega\times(0,\infty). \tag{11}$$

を得る。$w = \phi(u)$ とおくと $w_t = \phi'(u)\Delta w$ となり, (4) と (11) より

$$\delta_1\Delta w \le w_t \le \delta_2\Delta w \ \text{ in } \ \Omega\times(0,\infty). \tag{12}$$

そこで, w_j $(j = 1,2)$ を次の熱方程式に対する初期境界値問題の有界な一意解とする。

$$(w_j)_t = \delta_j\Delta(w_j) \quad \text{in} \ \Omega\times(0,\infty), \tag{13}$$
$$w_j = \phi(1) \quad \text{on} \ \partial\Omega\times(0,\infty), \tag{14}$$
$$w_j = 0 \quad \text{on} \ \Omega\times\{0\}. \tag{15}$$

このとき, (12) を考慮すると, 比較定理から次の補題が成り立つ。

補題 4 $\quad w_1 \le w \le w_2 \ \ in \ \ \Omega\times(0,\infty).$

さて, 次の事実を観察する。

$$\begin{aligned}
\delta_1 s \le \phi(s) \le \delta_2 s \qquad & \text{for} \quad s \ge 0, & (16)\\
-\delta_1 \log s \le -\Phi(s) \le -\delta_2 \log s \qquad & \text{for} \quad 0 < s \le 1, & (17)\\
e^{\frac{s}{\delta_1}} \le \Phi^{-1}(s) \le e^{\frac{s}{\delta_2}} \qquad & \text{for} \quad -\infty < s \le 0. & (18)
\end{aligned}$$

$w_j^\varepsilon = w_j^\varepsilon(x,t),\ (j=1,2)$ を次で定める。

$$w_j^\varepsilon(x,t) = w_j(x, \varepsilon^2 t).$$

(16) と (17) の助けを借りて, 補題 4 より

$$-\varepsilon^2 \delta_1 \log\left(\frac{w_2^\varepsilon}{\delta_1}\right) \le v^\varepsilon \le -\varepsilon^2 \delta_2 \log\left(\frac{w_1^\varepsilon}{\delta_2}\right) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty). \tag{19}$$

Varadhan [Va] の結果より, $\varepsilon \to 0^+$ のとき, 関数 $-\varepsilon^2 \delta_j \log w_j^\varepsilon$ は関数 $\frac{1}{4t} d(x)^2$ に $\overline{\Omega} \times (0,\infty)$ 内の任意の compact 集合上一様収束することがわかる。従って, 次の補題が得られる。

補題 5 $\quad \dfrac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \dfrac{1}{4t} d(x)^2 \le \liminf\limits_{\varepsilon \to 0^+} v^\varepsilon(x,t) \le \limsup\limits_{\varepsilon \to 0^+} v^\varepsilon(x,t) \le \dfrac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \dfrac{1}{4t} d(x)^2 \quad$ *in* $\quad \Omega \times (0,\infty)$.

この補題は次を導く。

補題 6 $\quad \Omega \times (0,\infty)$ 内の任意の *compact* 集合 K に対して, $\varepsilon_0 > 0,\ 0 < c_1 \le c_2 < +\infty$ を満たす 3 つの定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(K),\ c_1 = c_1(K)$ と $c_2 = c_2(K)$ が存在して, もし $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば次が成り立つ。

$$0 < c_1 \le v^\varepsilon \le c_2 \quad in \quad K.$$

この補題と [LSV] の勾配評価の方法および [Gild] の定理の助けを借りて, $\Omega \times (0,\infty)$ 内の任意のコンパクト集合 K を与えるとき, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $\{v^\varepsilon\}$ が K 上一様有界で同程度連続であることを示すことができる。([MS3] 参照）従って, $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ を満たすある正数列 $\{\varepsilon_n\}$ および $\Omega \times (0,\infty)$ 上の連続関数 $v = v(x,t)$ が存在して, 関数列 $\{v^{\varepsilon_n}\}$ は $\Omega \times (0,\infty)$ 上 v に広義一様収束する。特に, 補題 5 より

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} \cdot \frac{1}{4t} d(x)^2 \le v(x,t) \le \frac{\delta_2}{\delta_1} \cdot \frac{1}{4t} d(x)^2 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty). \tag{20}$$

(20) および $\partial\Omega$ 上 $d(x)^2 = \nabla(d(x)^2) = 0$ であることを合わせると, $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ 上の連続関数 $V(x,t)$ を

$$V(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & \text{if} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{if} \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

によって定めることができる。このとき, $V = V(x,t)$ は次の Cauchy 問題の粘性解であることがわかる。

$$V_t = -|\nabla V|^2 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \tag{21}$$

$$V = 0 \quad \text{on} \quad (\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \times \{0\}, \tag{22}$$

$$V = +\infty \quad \text{on} \quad \Omega \times \{0\}. \tag{23}$$

最後に Strömberg [Str] の初期値問題の粘性解の一意性の結果を用いると

$$V(x,t) = \frac{\left(\text{dist }(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\right)^2}{4t} \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty))$$

でなければならないことがわかる。従って,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v^\varepsilon(x,t) = \frac{d(x)^2}{4t} \quad ((x,t) \in \Omega \times (0,\infty)).$$

故に, まず $t = 1$ とおき, 次に $\varepsilon^2 = t$ とおくと, 定理 1 が得られる。

References

[CrIL] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 1–67.

[EI] L. C. Evans and H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, Ann. Inst. Henri Poincaré 2 (1985), 1–20.

[FW] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York 1984.

[Gild] B. H. Gilding, Hölder continuity of solutions of parabolic equations, J. London Math. Soc. 13 (1976), 103–106.

[LSV] P. L. Lions, P. E. Souganidis, and J. L. Vázquez, The relation between the porous medium and the eikonal equations in several space dimensions, Rev. Mat. Iberoamericana 3 (1987), 275–310.

[MS1] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Matzoh ball soup: Heat conductors with a stationary isothermic surface, Ann. of Math. 156 (2002), 931–946.

[MS2] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces for unbounded domains, Indiana Univ. Math. J., to appear.

[MS3] R. Magnanini and S. Sakaguchi, Nonlinear diffusion with a bounded stationary level surface, in preparation.

[Sir] B. Sirakov, Symmetry for exterior elliptic problems and two conjectures in potential theory, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire 18 (2001), 135–156.

[Str] T. Strömberg, The Hopf-Lax formula gives the unique viscosity solution, Differential Integral Equations 15 (2002), 47–52.

[Va] S. R. S. Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 431–455.