ある半線型波動方程式の解の長時間挙動について

大阪大学理学研究科　久保 英夫

1　序

このノートでは次の半線型波動方程式を考える:

$$\Box u + F(\partial u) = 0 \qquad \text{in} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \varepsilon f(x), \quad (\partial_t u)(0,x) = \varepsilon g(x) \quad \text{for} \quad x\in\mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

ここで，$\Box = \partial_t^2 - \Delta$, $\Delta = \sum_{j=1}^2 \partial_j^2$, $\partial = (\partial_0, \partial_1, \partial_2)$, $\partial_0 = \partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j\,(j=1,2)$ であり，$u(t,x)$ は未知の実数値関数とする．また，$\varepsilon > 0$ とし，f, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ を仮定する．更に，非線型項は３次のオーダーのものを考える．つまり,

$$F(\partial u) = \sum_{a,b,c=0}^{2} g^{a,b,c}(\partial_a u)(\partial_b u)(\partial_c u) \tag{1.3}$$

のように実定数 $g^{a,b,c}$ を用いて表されるものとする.

始めに，$F(\partial u) = \kappa(\partial_t u)^3$ $(\kappa\in\mathbb{R})$ の場合に知られている結果を整理しておく.

(i) $\kappa = 0$ のとき: 方程式 (1.1) は斉次波動方程式となり，その解 u_0 は

$$|u_0(t,x) - |x|^{-1/2}\mathcal{F}_0(|x|-t, x/|x|)| \le C\langle |x|-t\rangle^{1/2}\langle t\rangle^{-3/2} \qquad \text{for } |x| \ge (t+1)/2 \tag{1.4}$$

を満たす事が知られている．ここで，$\langle t\rangle = \sqrt{1+t^2}$ であり，$\mathcal{F}_0(\sigma,\omega)$ は Friedlander の放射場と呼ばれ，各 $(\sigma,\omega)\in\mathbb{R}\times S^1$ に対して次のように定義される:

$$\mathcal{F}_0(\sigma,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_\sigma^\infty (s-\sigma)^{-1/2}\{R(s,\omega;g) - \partial_s R(s,\omega;f)\}ds, \tag{1.5}$$

$$R(s,\omega;g) = \int_{y\cdot\omega = s} g(y)\,dS_y.$$

(例えば，Hörmander [4, Theorem 6.2.1] を参照せよ.)

(ii) $\kappa < 0$ のとき: 初期値問題 (1.1)–(1.2) の古典解は有限時間内に爆発する事が知られている．(例えば，Schaeffer [9] 等.)

(iii) $\kappa > 0$ のとき: 初期値問題 (1.1)–(1.2) のエネルギー・クラスでの大域可解性が知られている．(例えば，Lions and Strauss [8].) この結果は，$\kappa > 0$ の場合, 非線型項が摩擦項として働く事を反映している．

次に，$F(\partial u)$ が (1.3) の様な一般的な形で与えられる場合を考える．ここでの目的は，非線型項が摩擦項のように働き，結果として，古典解が時間大域的に存在する様な非線型項の係数 $g^{a,b,c}$ に関する条件を導き，更に，得られた大域解の主要部を求める事である．しかし，一般の初期データを扱う事は困難なので，以下では，そのサイズ ε は十分小さいものとして議論を進める．

結果を述べるために，次の量を導入する：

$$G(\omega) = \sum_{a,b,c=0}^{2} g^{a,b,c}\omega_a\omega_b\omega_c \quad \text{for } (\omega_0, \omega) = (\omega_0, \omega_1, \omega_2) \in \{-1\} \times S^1. \tag{1.6}$$

この $G(\omega)$ が恒等的に零となる場合は，既に Godin [1] 及び Katayama [6] により独立に調べられており，小さな初期データに対し時間大域解の一意存在が示されている．更に，この場合は斉次波動方程式からの摂動と見做せる事も知られている．(例えば，Kubo and Ohta [7].) この事実を形式的に観るには

$$u(t,x) \sim u_0(t,x) \sim |x|^{-1/2}\mathcal{F}_0(|x| - t, x/|x|)$$

と考えれば良い．実際,

$$\partial_a u(t,x) \sim \omega_a\, |x|^{-1/2}(\partial_\sigma \mathcal{F}_0)(|x| - t, x/|x|) \quad (a = 0, 1, 2)$$

となるので，非線型項の主要部は

$$F(\partial u)(t,x) \sim -G(\omega)\, |x|^{-3/2}(\partial_\sigma \mathcal{F}_0)^3(|x| - t, x/|x|) \tag{1.7}$$

と計算でき，全ての $\omega \in S^1$ に対して $G(\omega) = 0$ ならば $\Box u \sim 0$ を得る．

しかし，一般には，斉次波動方程式からの摂動と見做す事はできないので，非線型効果を反映する変数 $\tau = \varepsilon^2 \log(1+t)$ を導入し，

$$u(t,x) \sim |x|^{-1/2} w(|x| - t, x/|x|, \varepsilon^2 \log(1+t))$$

と近似すると，方程式 (1.1) から $w(\sigma, \omega, \tau)$ についての方程式

$$2\partial_\tau\partial_\sigma w - G(\omega)(\partial_\sigma w)^3 = 0 \quad \text{for } \ \sigma \in \mathbb{R},\ \omega \in S^1,\ \tau \geq 0 \tag{1.8}$$

が従う．全ての $\omega \in S^1$ に対して $G(\omega) \leq 0$ ならば, (1.8) は τ について大域的に解ける事に注意すれば，この条件の下で元の問題も時間大域的に解けるのではないかと予想される．特別な場合として，$F(\partial u) = \kappa(\partial_t u)^3$ を考えれば，$G(\omega) = -\kappa$ であって $\kappa \geq 0$ が大域可解性の為の必要十分条件であった．

以上を踏まえ，次の結果が得られた事を報告する．

定理 1.1. k を自然数とし，$\eta,\, \eta' > 0$ とする．全ての $\omega \in S^1$ に対して $G(\omega) \leq 0$ を仮定する．この時，任意の $f,\, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対し正数 $C_0,\, \varepsilon_0$ が存在して，任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して初期値問題 (1.1)–(1.2) の古典解 $u(t,x)$ が $[0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ において一意的に存在し

$$|\partial u(t,x)|_k \leq C_0\varepsilon(1+t)^\eta \langle t+|x|\rangle^{-1/2}\langle t-|x|\rangle^{-1/2} \quad \mathit{for}\ (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \tag{1.9}$$

を満たす．更に, 十分小さな η に対し，$\mathbb{R}\times S^1$ 上の滑らかな関数 p_∞，q_∞ が存在し，次の漸近公式を満たす: $|x| \geq t/2+1,\ a = 0,1,2$ に対して,

$$\left|\partial_a u(t,x) - \frac{\varepsilon\,\omega_a\, p_\infty(|x|-t, x/|x|)\,|x|^{-1/2}}{\sqrt{Q(|x|, |x|-t, x/|x|)}}\right| \leq C_0\varepsilon\langle |x|\rangle^{-1+\eta'}, \tag{1.10}$$

$$Q(r,\sigma,\omega) = 1 - \varepsilon^2 G(\omega)(p_\infty(\sigma,\omega)^2\log(r/s) + q_\infty(\sigma,\omega)).$$

但し，$s = |\sigma - 1| + 1$ であり,

$$|p_\infty(|x|-t, x/|x|)| \leq C_0\langle |x|-t\rangle^{-(1/2)+\eta}, \tag{1.11}$$

$$|q_\infty(|x|-t, x/|x|)| \leq C_0\langle |x|-t\rangle^{-1} \tag{1.12}$$

が成立つ.

注意 1. Schrödinger 方程式における類似の結果は Hayashi and Naumkin [2, 3] により, また Klein-Gordon 方程式については Sunagawa [10] によって既に考察されている.

注意 2. 漸近公式 (1.10) により，上の定理で得られた解は光錐 $|x| = t$ の近くで $(\log r)^{-1/2}$ の分だけ自由解より速く減衰することが分かる．つまり，$G(\omega)$ が恒等的に零とならない限り，初期値問題 (1.1)–(1.2) は斉次波動方程式からの摂動と見做せない事が分かる.

最近, Hoshiga [5] は本研究とは独立に，初期値問題 (1.1)–(1.2) の大域可解性及び減衰評価を導いた.

2 記号

この節では記号をいくつか用意する.

$r = |x|,\ \partial_r = \sum_{j=1}^{2} x_j r^{-1}\partial_j,\ \Omega = x_1\partial_2 - x_2\partial_1$ とおく．$\omega_j = x_j/r\ (j=1,2)$, $\tilde{\omega}_1 = -\omega_2,\ \tilde{\omega}_2 = \omega_1$ とすれば,

$$\partial_i = \omega_i\partial_r + \tilde{\omega}_i r^{-1}\Omega \quad \text{for} \quad i = 1,2 \tag{2.1}$$

を得る．また，$S=t\partial_t+r\partial_r$, $L_j=x_j\partial_t+t\partial_j$ $(j=1,2)$ とおき，$\Gamma=\{\Gamma_0,\Gamma_1,\dots,\Gamma_6\}=\{S,L_1,L_2,\Omega,\partial_0,\partial_1,\partial_2\}$ と表す． $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_6)$ を多重指数とする時，Γ^α for $\Gamma_0^{\alpha_0}\cdots\Gamma_6^{\alpha_6}$ と記す．交換子 $[A,B]=AB-BA$ について

$$[\Gamma_a,\Box]=0\quad\text{if}\quad a\neq 0,\quad [S,\Box]=-2\Box$$

が成り立つ．非負整数 s と滑らかな関数 φ に対し，

$$|\varphi(t,x)|_s=\sum_{|\alpha|\le s}|\Gamma^\alpha\varphi(t,x)|,\quad |\partial\varphi(t,x)|_s=\sum_{|\alpha|\le s}\sum_{a=0}^{2}|\Gamma^\alpha\partial_a\varphi(t,x)|$$

と置く．更に，$D_+=\partial_t+\partial_r$, $D_-=\partial_t-\partial_r$ を導入する．この時，

$$D_+=(t+r)^{-1}(S+\sum_{j=1}^{2}\omega_jL_j) \tag{2.2}$$

が成り立つ事に注意する．

他方，$(\sigma,\omega,\tau)\in\mathbb{R}\times S^1\times[0,\infty)$ を変数とする関数について，これらの変数に関する微分を

$$Z_1=\partial_\sigma,\quad Z_2=\omega_1\partial_{\omega_2}-\omega_2\partial_{\omega_1},\quad Z_3=\partial_\tau \tag{2.3}$$

と表す．また，$(r,\sigma,\omega)\in[1,\infty)\times\mathbb{R}\times S^1\times[0,\infty)$ を変数とする関数 $y(r,\sigma,\omega)$ に対して次の記号を使う：

$$\{y(r,\sigma,\omega)\}_s=\sum_{\alpha_1+\alpha_2\le s}|Z_1^{\alpha_1}Z_2^{\alpha_2}y(r,\sigma,\omega)|.$$

3 証明の方針

第一段：正数 τ_* を任意に与える時，初期値問題 (1.1)–(1.2) の古典解が $\varepsilon^2\log(1+t)\le\tau_*$ である限り存在する事を示す．但し，τ_* が大きく成れば成る程，一般に，ε はそれだけ小さく取るものとする．この結論は，所謂 “almost global existence” からは従わない．何故なら，“almost global existence” が主張するのは，古典解の最大存在時刻 T_ε がある定数 A に対し $\varepsilon^2\log(1+T_\varepsilon)\ge A$ を満たす事だからである．

所望の結論を得る為に本質的なのは，都合の良い近似解 $u_1(t,x)$ を構成する事である．u_1 にとって必要な性質を纏めると次の様になる．

補題 3.1. $\tau_*>0$, k を非負整数とし，$f,\ g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ とする．全ての $\omega\in S^1$ に対して $G(\omega)\le 0$ を仮定する．この時，正定数 $C=C(\tau_*)$，$\varepsilon_1=\varepsilon_1(\tau_*)$ が存在して，任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ に対し

$$|u_1(t,x)|_k\le C\varepsilon\langle t+|x|\rangle^{-1/2}\langle t-|x|\rangle^{-1/2}\quad \textit{for } (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

$$\int_0^t \big\||R(u_1)(t)|_k\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\le C\varepsilon^{3/2}\quad \textit{for}\ \ t\in[0,t_*] \tag{3.2}$$

が成り立つ．但し，$t_*=\exp(\tau_*/\varepsilon^2)-1$ であり，

$$R(u)(t,x)=\Box u(t,x)+F(\partial u)(t,x) \tag{3.3}$$

と置いた.

さて，u_1 の具体的な構成は次の様にする.
$\tilde\chi_1$ を $s\le 1$ に対して $\tilde\chi_1(s)=1$，$s\ge 2$ に対して $\tilde\chi_1(s)=0$ である様な $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数とし，$\tilde\chi_2(s)$ を $s\le 1/2$ に対して $\tilde\chi_2(s)=0$，$s\ge 2/3$ に対して $\tilde\chi_2(s)=1$ である様な $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数とする．そして，$\chi_1(t)=\tilde\chi_1(\varepsilon^4 t)$，$\chi_2(t,r)=\tilde\chi_2(r/(t+1))$ と置く．また，$u_0(t,x)$ を (1.2) を満たす自由解とする．更に，$w(\sigma,\omega,\tau)$ を

$$w(\sigma,\omega,0)=\mathcal{F}_0(\sigma,\omega)\quad \text{for}\ \ \sigma\in\mathbb{R},\ \omega\in S^1 \tag{3.4}$$

を満たす (1.8) の一意解とする．即ち，

$$w(\sigma,\omega,\tau)=-\int_\sigma^\infty \frac{(\partial_\sigma\mathcal{F}_0)(\rho,\omega)}{\sqrt{1-G(\omega)(\partial_\sigma\mathcal{F}_0)^2(\rho,\omega)\,\tau}}\,d\rho \tag{3.5}$$

と表されるものとする．この時,

$$\begin{aligned} &u_1(t,x)=\varepsilon u_0(t,x)+\varepsilon(1-\chi_1(t))\chi_2(t,r)v(t,x),\\ &v(t,x)=r^{-1/2}w(r-t,\omega,\varepsilon^2\log(1+t))-u_0(t,x)\end{aligned} \tag{3.6}$$

により u_1 を定義すれば良い.

補題 3.1 を認めれば，$[0,t_*]\times\mathbb{R}^2$ において初期値問題 (1.1)–(1.2) を u_1 の周りで解く事は難しくない．実際，$u_2:=u-u_1$ と置くと，u_2 は

$$\begin{aligned} &\Box u_2+H(u_1,u_2)+R(u_1)=0\qquad \text{in}\ \ (0,t_*)\times\mathbb{R}^2,\\ &H(u_1,u_2)=F(\partial u_1+\partial u_2)-F(\partial u_1)\end{aligned} \tag{3.7}$$

を満たし，$|(\Gamma^\alpha \partial u_2)(0,x)| \le C\varepsilon^3$ であるから，

$$|\partial u_2(t,x)|_k \le \varepsilon \langle t+|x|\rangle^{-1/2}\langle t-|x|\rangle^{-1/2} \quad \text{for } (t,x)\in[0,t_*]\times\mathbb{R}^2$$

なるア・プリオリ評価から出発して，エネルギー法と Klinerman の不等式を組み合わせる事により，

$$|\partial u_2(t,x)|_k \le C\varepsilon^{3/2} \langle t+|x|\rangle^{-1/2}\langle t-|x|\rangle^{-1/2} \quad \text{for } (t,x)\in[0,t_*]\times\mathbb{R}^2$$

を導けるから．この種の議論は [4] でも用いられている．

第二段: 正数 ε を十分小さく固定する時，$[0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ において初期値問題 (1.1)–(1.2) の古典解が存在する事を示す．第一段の結果を $\tau_*=1$ として用いると，ある正定数 C_1, ε_1 が存在して，任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ に対し

$$|\partial u(t,x)|_k \le C_1\varepsilon \langle t+|x|\rangle^{-1/2}\langle t-|x|\rangle^{-1/2} \qquad \text{for } (t,x)\in[0,t_*]\times\mathbb{R}^2 \tag{3.8}$$

が成り立つ事が分かる．但し，$t_*=\exp(1/\varepsilon^2)-1$ である．
　所望の結論を得る為には，η を十分小さな正数とする時，

$$|\partial u(t,x)|_k \le 2C_1\varepsilon(1+t)^\eta \langle t+|x|\rangle^{-1/2}\langle t-|x|\rangle^{-1/2} \quad \text{for } (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^2 \tag{3.9}$$

なるア・プリオリ評価から出発して，

$$|\partial u(t,x)|_k \le C_2\varepsilon(1+t)^{\eta/2} \langle t+|x|\rangle^{-1/2}\langle t-|x|\rangle^{-1/2} \quad \text{for } (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^2$$

を導けば良い．実際，$t\ge t_*$ に対して

$$C_2(1+t)^{\eta/2} \le C_2\exp(-\eta/(2\varepsilon^2))(1+t)^\eta \le C_1(1+t)^\eta$$

となる位 ε を十分小さく取り，(3.8) と組合わせると，(3.9) で $2C_1$ を C_1 とした評価式が得られるので．

第三段: 第二段で得られた (1.9) を満たす解に対し (1.10) を示す．有限伝播性と (1.9) により

$$|u(t,x)|_k \le C\varepsilon\langle t\rangle^\eta \quad \text{for } (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \tag{3.10}$$

が成り立つ事に注意する．(2.1) より，$a=0,1,2$ に対して

$$\partial_a u(t,x) = -\frac{\omega_a}{2} r^{-1/2} D_-(r^{1/2}u(t,x)) + O(r^{-1}|u(t,x)|_1) \tag{3.11}$$

が従うので，$D_-(r^{1/2}u(t,x))$ を評価すれば良い事が分かる．$v(t,r,\omega)=r^{1/2}u(t,r\omega)$ と置き，方程式 (1.1) を書き直すと

$$D_+D_-v-(8r)^{-1}G(\omega)(D_-v)^3=q \tag{3.12}$$

を得る．但し，$q(t,r,\omega)$ は

$$\{q(t,r,\omega)\}_k\le C\varepsilon\langle r\rangle^{-(3/2)+3\eta}\langle r-t\rangle^{-1/2}$$

を満たす滑らかな関数である．よって，(3.12) を特性曲線に沿って積分すれば $(D_-v)(r-\sigma,r,\omega)$ の評価が得られる．具体的には次の補題を用いる．

補題 3.2. $\varepsilon>0,\ \eta>0,\ 0<\delta<1/2,\ r_0>1$ そして m を自然数とする．$\kappa\in C^m(S^1),\ \rho,\ \beta\in C^m([r_0,\infty)\times\mathbb{R}\times S^1)$ とし，r_0 に依らない正定数 C_* が存在して

$$\begin{aligned}&\{\rho(r,\sigma,\omega)\}_m\le C_*\langle r\rangle^{-(3/2)+3\eta}\langle\sigma\rangle^{-1/2}\quad \textit{for}\ \ r\ge r_0,\ \sigma\in\mathbb{R},\ \omega\in S^1,\\ &\{\beta(r,\sigma,\omega)\}_m\le C_*\varepsilon\langle r\rangle^{\eta}\langle\sigma\rangle^{-1/2}\qquad \textit{for}\ \ r\ge r_0,\ \sigma\in\mathbb{R},\ \omega\in S^1\end{aligned}$$

と仮定する．更に，β は

$$\frac{d}{dr}\beta(r,\sigma,\omega)=-r^{-1}\kappa(\omega)\beta(r,\sigma,\omega)^3+\varepsilon\rho(r,\sigma,\omega)\quad \textit{for}\ \ r\ge r_0 \tag{3.13}$$

を満たすものとする．

もし，全ての $\omega\in S^1$ に対して $\kappa(\omega)\ge 0$ ならば，十分小さな $\varepsilon,\ \eta$ に対し，p_∞, $q_\infty\in C^m(\mathbb{R}\times S^1)$ 及び r_0 に依らない正定数 C が存在し，任意の $r\ge r_0,\ \sigma\in\mathbb{R},$ $\omega\in S^1$ に対し

$$\begin{aligned}&|\beta(r,\sigma,\omega)-\frac{\varepsilon\, p_\infty(\sigma,\omega)}{\sqrt{Q(r,\sigma,\omega)}}|\le C\langle r\rangle^{-(1/2)+\delta}\langle\sigma\rangle^{-1/2}, \qquad (3.14)\\ &Q(r,\sigma,\omega)=1+2\varepsilon^2\kappa(\omega)(p_\infty(\sigma,\omega)^2\log(r/r_0)+q_\infty(\sigma,\omega))\end{aligned}$$

且つ

$$\{p_\infty(\sigma,\omega)\}_m\le C\langle r_0\rangle^{\eta}\langle\sigma\rangle^{-1/2},\quad \{q_\infty(\sigma,\omega)\}_m\le C\langle\sigma\rangle^{-1+\eta} \tag{3.15}$$

を満たす.

同様の主張は，[2, 3] や [10, Lemma 2.1] でも得られており，この補題の証明は [10] の議論に基づくが，剰余項の評価を改善する為に主要部の取り方が若干異なる．

参考文献

[1] P. Godin, *Lifespan of semilinear wave equations in two space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), 895–916.

[2] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Large time behavior for the cubic nonlinear Schrödinger equation*, Canad. J. Math. **54** (2002), 1065–1085.

[3] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *On the asymptotics for cubic nonlinear Schrödinger equations*, Complex Var. Theory Appl. **49** (2004), 339–373.

[4] L. Hörmander, *"Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations"*, Mathématiques & Applications, **26**, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[5] A. Hoshiga, *private communication.*

[6] S. Katayama, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **31** (1995), 645–665.

[7] H. Kubo and M. Ohta, *On the global behaviour of classical solutions to coupled systems of semilinear wave equations*, *in* "New trends in the theory of hyperbolic equations", 113–211, Oper. Theory Adv. Appl., 159, Birkhäuser, Basel, 2005.

[8] J.-L. Lions and W. A. Strauss, *Some non-linear evolution equations*, Bull. Soc. math. France **93** (1965), 43–96.

[9] J. Schaeffer, *Finite time blow-up for* $u_{tt} - \Delta u = H(u_r, u_t)$ *in two space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 513–543.

[10] H. Sunagawa, *Large time behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with nonlinear dissipative terms*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 379–400.

Email： kubo@math.sci.osaka-u.ac.jp