3 次の非線形項を持つ 4 階 SCHRÖDINGER 型方程式の解の漸近挙動について

瀬片 純市 *

1. 概要

本講演では 4 階非線形 Schrödinger 型方程式

$$i\partial_t u - \frac{1}{4}\partial_x^4 u = \lambda|u|^2 u, \qquad t, x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

の時刻無限大における解の漸近挙動について考える．ここに $u = u(t,x)$ は複素数値未知関数, $i = \sqrt{-1}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^j = \partial^j/\partial x^j$, λ は実定数とする．

方程式 (1.1) は渦糸運動の高次近似モデルとして Fukumoto-Moffatt[3] により提唱された 4 階非線形 Schrödinger 型方程式

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u + \nu\partial_x^4 u &= -\frac{1}{2}|u|^2 u + \lambda_1|u|^4 u + \lambda_2(\partial_x u)^2\overline{u} + \lambda_3|\partial_x u|^2 u \\ &\quad + \lambda_4 u^2\partial_x^2\overline{u} + \lambda_5|u|^2\partial_x^2 u, \end{aligned}$$

を単純化したものである．ここに $\lambda_1 = 3\mu/4, \lambda_2 = 2\mu-\nu/2, \lambda_3 = 4\mu+\nu, \lambda_4 = \mu, \lambda_5 = 2\mu-\nu$ であり, μ, ν は定数である．

まず非線形分散型方程式の散乱理論について簡単に復習する．以下のような 1 次元非線形分散型方程式を考える．

$$i\partial_t v + \mathcal{L}(i^{-1}\partial_x)v = \mu|v|^{p-1}v, \qquad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

ここに $v = v(t,x)$ は複素数値未知関数, $p > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(i^{-1}\partial_x)$ は実シンボル $\mathcal{L}(\xi)$ を持つ Fourier かけ算作用素とする．

非線形方程式 (1.2) の解 v が $|t| \to \infty$ において線形方程式

$$i\partial_t w + \mathcal{L}(i^{-1}\partial_x)w = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

の解 w に近づくとき, 方程式 (1.2) は短距離型であるという．非線形方程式 (1.2) の解 v が線形方程式 (1.3) の解 w に近づかない, すなわち非線形項の影響が時間無限大において無視できないとき, (1.2) は長距離型であるという．もし解 u が時間変数について減衰していれば, 非線形項の冪が高くなるにつれ, 非線形項の影響が小さくなるため, 冪が高い非線形項は短距離型になると推測される．逆に冪が小さい非線形項はその影響が大きく長距離型になると思われる．

Cook-Kuroda の方法によれば (1.2) の非線形項が $L_t^1([1,\infty), L_x^2(\mathbb{R}))$ に属していればおよそ短距離型になることが知られている．そこで, 以下のような減衰評価が成り立っているとする．

$$\|e^{it\mathcal{L}(i^{-1}\partial_x)}\phi\|_{L_x^\infty} \le Ct^{-m}. \tag{1.4}$$

このとき非線形項は $L_x^2(\mathbb{R})$ において $|v|^{p-1}v = \mathcal{O}(t^{-m(p-1)})$ となる．$t^{-m(p-1)}$ が $[1,\infty)$ 上可積分であることと $p > 1 + \frac{1}{m}$ は同値であるので, $p > 1 + \frac{1}{m}$ ならば非線形項 $|v|^{p-1}v$ は短距離型であると推測できる．

* 現在の所属: 福岡教育大学教育学部.

1次元 Schrödinger 方程式の場合, 基本解の L^∞ における減衰のオーダーは $t^{-\frac{1}{2}}$ であるので

$$i\partial_v + \frac{1}{2}\partial_x^2 v = \mu|u|^2 u, \qquad t, x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

がちょうど短距離型の枠組みから外れる. 実際, Tsutsumi-Yajima[8] により, (1.5) の非線形項の冪が3より大きいときは短距離型になることが示されており, さらに Barab[1] により (1.5) の非線形項の冪が3以下のときは短距離型にならないことが示されている. したがって, 方程式 (1.5) の解は線形 Schrödinger 方程式の解と異なる挙動を示す. このことに関して, Ozawa[6] は与えられた終値データ $\phi_\pm$ に対して, $|t| \to \infty$ のとき

$$v(t,x) \sim \sqrt{2\pi} E(t,x) \exp\left(\mp i\mu \left|\hat{\phi}_\pm\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 \log|t|\right) \hat{\phi}_\pm\left(\frac{x}{t}\right),$$

を満たす非線形 Schrödinger 方程式 (1.5) の解 v が存在することを示した. その後, Hayashi-Naumkin[4] により初期データ $v(0,x)$ を与えたときに上のような漸近形を持つ非線形 Schrödinger 方程式の解 v が存在することを示した.

さて, 4階非線形 Schrödinger 型方程式 (1.1) の場合に戻る. まず, (1.1) の線形化方程式の解 $e^{-it\partial_x^4/4}\phi(x)$ の各点評価に関して次の結果を得た.

Proposition 1.1 (Ben Artzi-Koch-Saut [2], S[7], Hayashi-Naumkin[5])**.** $|\partial_x|^{-1}\phi \in L^1$ とする.

$$\|e^{-it\partial_x^4/4}\phi\|_{L_x^\infty} \le Ct^{-\frac{1}{2}}\||\partial_x|^{-1}\phi\|_{L_x^1},$$

ここに $|\partial_x|^{-1}\phi = \mathcal{F}[|\xi|^{-1}\hat{\phi}(\xi)]$.

つまり, $\phi(x)$ の Fourier 変換 $\hat{\phi}(\xi)$ が $\xi = 0$ で $O(|\xi|^\alpha)(\alpha > 0$ はある定数) となっていれば, ϕ を初期データとする (1.1) の線形化方程式の解 $e^{-it\partial_x^4/4}\phi$ の各点の減衰オーダーは $t^{-\frac{1}{2}}$ であることを示している. したがってこの場合, 1次元 Schrödinger 方程式の解と同じ減衰評価をもち[1], 方程式 (1.1) は長距離型と短距離型との境目に位置する. したがって方程式 (1.1) が長距離型になるのか短距離型になるのかは興味深いところであるが, 今回, 方程式 (1.1) は長距離型になることがわかった. 結果を述べる前に幾つか記号を用意する.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \{\phi \in \mathcal{S}'; \phi \in H^{0,4} \ and \ x^k\phi \in \dot{H}^{k-12}, \ k = 0,1,2,3,4\}. \\ \|\phi\|_{\mathcal{D}} &\equiv \|\phi\|_{H^{0,4}} + \sum_{k=0}^{4} \|x^k\phi\|_{\dot{H}^{k-12}}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

とする. 与えられた終値データ $\phi_\pm$ に対し, 次のような関数を導入する.

$$v_\pm(t,x) = \sqrt{2\pi} F(t,x) \exp\left(iS^\pm(t,\chi)\right) \hat{\phi}_\pm(\chi), \quad t, x \ne 0, \tag{1.7}$$

ここに $\hat{\phi}_\pm$ は $\phi_\pm$ の x 変数に関する Fourier 変換であり,

$$\begin{aligned} S^\pm(t,x) &= \mp\frac{\lambda}{3}|\hat{\phi}_\pm(x)|^2|x|^{-2}\log|t|, \qquad |t| \ge e, \\ \chi &= \left|\frac{x}{t}\right|^{-\frac{2}{3}} \frac{x}{t}, \end{aligned}$$

とする.

主結果は以下の通りである.

[1] 初期データの Fourier 変換が $\xi = 0$ で消えていない場合はこのような減衰は得られない. 一般には4階 Schrödinger 型方程式の基本解の各点評価は $t^{-\frac{1}{4}}$ となる.

Theorem 1.1 ([7]). *(i)* $\phi_+ \in \mathcal{D}$ とし, $\|\phi_+\|_{\mathcal{D}}$ は十分小さいとする．ここに $\mathcal{D}$ は (1.6) で定義されたものである．このとき以下のような不等式を満たす (1.1) の解 $u \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R})) \cap L^8_{loc}((0,\infty); L^\infty(\mathbb{R}))$ が一意に存在する．

$$\sup_{t\ge e}(t^\alpha \|u(t) - v_+(t)\|_{L^2_x}) \;<\; \infty, \tag{1.8}$$

$$\sup_{t\ge e}\left\{ t^\alpha \left(\int_t^\infty \|u(\tau) - v_+(\tau)\|^8_{L^\infty_x}\, d\tau \right)^{\frac{1}{8}} \right\} \;<\; \infty, \tag{1.9}$$

ここに $3/8 < \alpha < 1$, $v_+(t,x)$ は (1.7) で定義された修正自由動力学である．

(ii) $\phi_+ \in \mathcal{D}$ とし, $\|\phi_+\|_{\mathcal{D}}$ は十分小さいものとする．このとき以下の不等式を満たす (1.1) の解 $u \in C((-\infty,0]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^8_{loc}((-\infty,0); L^\infty(\mathbb{R}))$ が一意に存在する．

$$\sup_{t\le -e}(|t|^\alpha \|u(t) - v_-(t)\|_{L^2_x}) \;<\; \infty,$$

$$\sup_{t\le -e}\left\{ |t|^\alpha \left(\int_{-\infty}^t \|u(\tau) - v_-(\tau)\|^8_{L^\infty_x}\, d\tau \right)^{\frac{1}{8}} \right\} \;<\; \infty,$$

ここに $3/8 < \alpha < 1$, $v_-(t,x)$ は (1.7) で定義されたものである．

Remark. Theorem 1.1 の前半部分により, 方程式 (1.1) の正の時間に対する修正波動作用素 $\Omega_+ : \phi_+ \mapsto u(0)$ は $\mathcal{D}$ の小さな開球上定義される．同様に, Theorem 1.1 の後半部分により, 負の時間に対する修正波動作用素の存在もわかる．

Remark. 関数 $\sqrt{2\pi}F(t,x)\hat{\phi}_\pm(\chi)$ は $e^{-it\partial_x^4/4}\phi_\pm$ の leading term である．したがって, Theorem 1.1 の前半部分はおよそ

$$u(t) \sim \exp\left(-i\frac{\lambda}{3}\left|\hat{\phi}_+(\chi)\right|^2 |\chi|^{-2}\log|t| \right) e^{-it\partial_x^4/4}\phi_+, \qquad \text{as } t \to \infty,$$

であることを示している．

Fukumoto-Moffatt のモデルによれば, (1.1) の線形項は $i\partial_t - \frac{1}{4}\partial_x^4$ よりも $i\partial_t + \partial_x^2 + \nu\partial_x^4$ を考えた方が自然であるが, 線形項が後者の場合についても少し触れる予定である．

References

1. J.E. Barab, *Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.
2. M. Ben-Artzi, H. Koch and J-C. Saut, *Dispersion estimates for fourth order Schrödinger equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), 87–92.
3. Y. Fukumoto and H. K. Moffatt, *Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part I. A higher-order asymptotic formula for the velocity*, J. Fluid. Mech. **417** (2000), 1-45.
4. N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.
5. N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotic properties of solutions to dispersive equation of Schrödinger type* preprint.
6. T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.
7. J. Segata, *Modified wave operators for the fourth-order non-linear Schrödinger-type equation with cubic non-linearity*, Math. Meths. Appl. Math. in press.
8. Y. Tsutsumi and K. Yajima, *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 186–188.