Beale-Kato-Majda type blow-up criteria for 3D Navier-Stokes equations in unbounded domains

谷内靖 (信州大学・理学部)

Ω を $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3_+$ または滑らかな境界を持つ 3 次元外部領域とする。Ω 上の非圧縮性粘性流体の運動は次の Navier-Stokes 方程式で記述される。

$$\text{(N-S)} \begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, & \text{div } u = 0 \qquad t \in (0,T), \quad x \in \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = 0, & u|_{t=0} = a, \end{cases}$$

ここで、$u = (u^1(x,t), u^2(x,t), u^3(x,t))$, $p = p(x,t)$ は未知関数であり、それぞれ流体の速度場と圧力場を表しており、a は与えられた初期速度場である。また、$\nu > 0$ は粘性を表す定数である。(なお、$\nu = 0$ の場合、上記の方程式は Euler 方程式である。)

本講演ではこの方程式の L^p-強解 $(p \geq 3)$ を取り扱う。$a \in L^p(\Omega)$ $(p \geq 3)$ の時、滑らかな解の時間局所的一意存在はわかっているが、時間大域可解性はわかっていない。時間局所解で、実際に有限時間で滑らかさを失ってしまう解が存在するか否かは未解決な問題として残されている。

この問題に関して、Beale-Kato-Majda の Blow-up Criterion が有名である。Beale-Kato-Majda[1] は全空間上の Euler 方程式や Navier-Stokes 方程式に対し, 局所解 $u \in C([0,T); H^m)$ $(m \geq 3)$ が

$$\int_0^T \|\omega\|_{L^\infty} d\tau < \infty$$

を満たすならば、ある $T' > T$ があり、u は $C([0,T'); H^m)$ に属する $(0,T')$ 上の解に延長できることを証明した。ここで、$\omega = \text{rot } u$ である。逆に $T < \infty$ が、$C([0,T); H^m)$ に属する解の最大存在時間であるならば

$$\int_0^T \|\omega\|_{L^\infty} d\tau = \infty$$

となる。この Beale-Kato-Majda の Blow-up Criterion は Ω が全空間の場合には多くの改良がなされている。例えば [9, 8] で L^∞-norm の代わりにや BMO-norm や $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$-norm を用いたものに改良されている。本講演では 3 次元 Navier-Stokes 方程式に対し、Ω が全空間の場合のみならず、外部領域などの場合でも、L^∞-norm の代わりに別の弱い norm(例えば bmo-norm など) を用いたものに改良できることを示す。

References

[1] Beale, J.T., Kato, T., Majda, A., Commun. Math. Phys. , **94** (1984), 61-66.

[2] Brezis, H., Gallouet, T., Nonlinear Anal. T.M.A. , **4** (1980), 677-681.

[3] Brezis, H., Wainger, S., Comm. Partial Differential Equations , **5** (1987), 773-789.

[4] Chemin, J-Y., Oxford Science Publications, 1998.

[5] Engler, H., Comm. Partial Differential equations. , **14** no. 4 (1989), 541-544.

[6] Ferrari, A. B., Commun. Math. Phys. , **155** (1993), 277-294.

[7] Kato, T., Ponce, G., Comm. Pure Appl. Math. , **41**, (1988) 891-907.

[8] Kozono, H., Ogawa, T., Taniuchi, Y., Math. Z. **242** (2002) 251-278.

[9] Kozono, H., Taniuchi, Y., Commun. Math. Phys. **214** (2000) 191-200

[10] Ogawa, T., Taniuchi, Y., J. Differential. Equation., **190** (2003), 39-63.

[11] Ozawa, T., J. Funct. Anal., **127** (1995), 259-269.

[12] Shirota, T., Yanagisawa, T., Proc. Japan Acad., **69** Ser. A (1993) 77-82.

[13] Zajaczkowski, W. M., Bull. Polish Acad. of Sciences Mathematics **37** (1989), 169-181.