パルス磁場上での散乱

川本 昌紀 [1]

[1] Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe-University, 1-1, Rokkodai-cho, Nada-ku, Hyogo 657-8501, Japan
email: mkawa@math.kobe-u.ac.jp

1 Introduction

本講演では，２次元平面 $\mathbf{R}^2$ を運動する量子力学的粒子に，その粒子が運動する平面に直交する方向に時間に依存した磁場 $\mathbf{B}(t) = (0, 0, B(t))$ を印加した系を考え，この場合の量子力学的粒子の振る舞いを考察する．ここで，$B(t)$ は時刻 t における磁場の強さとしている．
本講演は足立匡義氏 (神戸大学) との共同研究 [2] に基づく．

私たちは以下のハミルトニアンについての散乱理論を考察した．

$$H_0(t) = \frac{1}{2m}\left(p - qA(t,x)\right)^2, \quad H(t) = H_0(t) + V$$

ここで，$x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $p = -i(\partial_1, \partial_2)$ を荷電粒子の位置と運動量とし，$m > 0$, $q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ を荷電粒子の質量と電荷とする．ポテンシャル V の条件はのちに述べることとする．$A(t,x)$ は時間に依存した対称ゲージで以下のものとする：

$$A(t,x) = B(t)(-x_2/2, x_1/2)$$

ここで，我々は磁場の強さ $B(t)$ として以下のパルス磁場を考察した：

$$B(t) = \begin{cases} B, & t \in \bigcup_{n\in\mathbf{Z}}[nT, nT + T_B) =: I_B, \\ 0, & t \in \bigcup_{n\in\mathbf{Z}}[nT + T_B, (n+1)T) =: I_0. \end{cases}$$

ここで，$B > 0$, $0 < T_B < T$ とする．$H_0(t)$ と $H(t)$ が生成する poropagator を $U_0(t,0)$ と $U(t,0)$ とおく．ここで $H_0(t)$ が生成する propagator $U_0(t,s)$ とは，

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_0(t,s) = H_0(t)U_0(t,s), \quad i\frac{\partial}{\partial s}U_0(t,s) = -U_0(t,s)H_0(s), \quad U_0(0,0) = \mathrm{Id}$$

などの条件を満たすユニタリ作用素である．すなわち任意の初期値 $\psi_0(s) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ に対して，$\psi(t,s) = U_0(t,s)\psi_0(s)$ が Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,s) = H_0(t)\psi(t,s), \quad \psi(0,s) = \psi_0(s)$$

を満たすようにする作用素である．$U(t,0)$ についても同様である．我々の一つの目的は，波動作用素

$$W^{\pm} := \text{s}-\lim_{t\to\pm\infty} U(t,0)^* U_0(t,0)$$

の存在と完全性を示すことである．ここで磁場 $\mathbf{B}(t)$ が時間に依存しているせいで時刻 t についての全エネルギー $H(t)$ は当然保存しない．一方で周期条件 $\mathbf{B}(t+T) = \mathbf{B}(t)$ を満たすことから１周期のエネルギー $U(T,0)$ は保存することに注意すれば，漸近完全性は以下で与えられる：

$$\mathrm{Ran}(W^{\pm}) = L^2_{\mathrm{ac}}(U(T,0))$$

ここで，$L^2_{\mathrm{ac}}(U(T,0))$ は１周期のエネルギー $U(T,0)$ に対する絶対連続スペクトル部分空間である．

2　研究の背景

上の磁場 $B(t)$ について $T_B \equiv 0$ の場合を考察すると，与えられるハミルトニアンは $H_0^0 = p^2/(2m)$ となり，外場の影響力が一切ない自由 Schrödinger 作用素となる．この時，粒子の古典軌道 $x(t)$ は

$$x(t) = \left(xe^{-itp^2/(2m)}\psi, e^{-itp^2/(2m)}\psi\right)_{L^2(\mathbf{R}^2)}, \quad \psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$$

で与えられる．形式的に $x(t) = e^{itp^2/(2m)}xe^{-itp^2/(2m)}$ と書き，これを古典軌道と呼ぶことにする．$x'(t) = p(t)/m$, $p(t) := e^{itp^2/(2m)}pe^{-itp^2/(2m)} = p$ に注意すれば，$x(t) = tp/m + x$ となり等速直線運動の式を得る．よって荷電粒子は，初速 p/m を与えれば時間が十分に経てば遠方へ散乱する i.e., $\|x(t)\| \to \infty$, as $t \to \infty$．これより，$T_B \equiv 0$ の場合には散乱理論の考察が可能であると期待できる．さて，

$$T_0 = T - T_B$$

とおこう．T_0 は荷電粒子が外場の影響を受けずに自由散乱を行う時間の長さである．ここで $T_0 \equiv 0$ の場合を考察しよう．この時，ハミルトニアン $H_0(t)$ は定磁場中を表すハミルトニアン

$$H_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2m}(p_1 + qBx_2/2)^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - qBx_1/2)^2$$

となる．ここで同様に $x(t) = e^{itH_{\mathrm{L}}}xe^{-itH_{\mathrm{L}}}$ を計算すれば，(煩雑な計算のため不本意ながら割愛させて頂くとすると)

$$\|x(t) - x_{\mathrm{c}}\|^2 = \|D\|^2/(m\omega)^2$$

が成立する．ここで，$x_{\mathrm{c}} = (x_1 + D_2/(m\omega), x_2 - D_1/(m\omega))$ であり，

$$D_1 = p_1 + qBx_2/2, \quad D_2 = p_2 - qBx_1/2, \quad \omega = qB/m$$

である．これは円運動の式を表している．よって定磁場中の荷電粒子は半径を $\|D\|/(|m\omega|)$ 中心を x_{c} として円運動を行う．また，１周の周期が $2\pi/\omega$ であることから，ω を **サイクロトロン振動数**と呼び，中心 x_{c} を **guiding center** と呼んでいる．すなわち，$\|x(t)\| \to \infty$ as $t \to \infty$ は期待できない．数学的な言葉を借りて言えば，荷電粒子は定磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ に束縛される．束縛状態は散乱状態の補集合と思えば，散乱理論を $T_0 \equiv 0$ で考察することは不可能である．

2.1　外場に磁場を含む研究

定磁場の影響下では荷電粒子は散乱しないが，それは磁場が空間一様に存在するからである．以下に見るような状況を考察することで磁場の影響下でも散乱理論が考察が可能である．

　１．磁場が位置 x に依存し (i.e., $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x) = (0, 0, B(x))$)，さらに，

$$\lim_{|x| \to \infty} B(x) = 0$$

を満たす場合には散乱理論の考察が出来る．これらの研究結果についてはLoss-Thaller [4]に詳しく書かれている．

２．磁場の影響を打ち消す程強いポテンシャルを印加すれば粒子の散乱が観測される．近年，講演者は同じく足立匡義氏と共にこれらの研究についても考察している [1]．具体的には，定磁場を記述するハミルトニアン H_{L} に Stark ポテンシャル $qE(t)\cdot x$ を印加したハミルトニアン

$$H_{\mathrm{L,S,0}}(t) = H_{\mathrm{L}} - qE(t)\cdot x$$

と摂動を入れた $H_{\mathrm{L,S}}(t) = H_{\mathrm{L,S,0}}(t) + V$ について散乱理論を考察した．$E(t)$ は定電場，またはサイクロトロン振動数と同じ周期で振動する交流電場である．

３．磁場が時間に周期的に変動する場合に対しても散乱理論が考察出来ることが知られている．この場合は Korotyaev [3] による先行研究がある．特にこの論文では，粒子の古典軌道 $x(t)$ が

(i): bound ,i.e., $\|x(t)\| \le C$ holds for all $t \in \mathbf{R}$.

(ii): $x(t) \sim t\theta(t) + \alpha$ for $\alpha \in \mathbf{R}$ and some periodic or antiperiodic function $\theta(t)$.

(iii): $x(t) \sim e^{\lambda t}\theta_1(t) + e^{-\lambda t}\theta_2(t)$ for $\lambda > 0$, some periodic or antiperiodic functions $\theta_1(t)$ and $\theta_2(t)$.

と表される場合に (ii), (iii) の系について散乱理論を考察した．特に (iii) の系は面白く，等速直線運動では，$x(t) \sim \mathcal{O}(t)$ であり，サイクロトロン加速器のように電場の外力 (加速度) が働く系であっても $x(t) \sim \mathcal{O}(t^2)$ である．すなわち，この系での粒子の加速は異常であることが見てとれる．(当然理想モデルでの考察であり，実際は大量のエネルギーロスが発生する訳ではあるが,,,)

3　主結果

磁場が on $(t \in I_B)$ の時，粒子は guiding center を中心とした回転運動をさせられ，磁場が off $(t \in I_0)$ の場合には等速直線運動を行う．では磁場が on と off を交互に繰り返す場合にはどうなるか．単純な予想では，guiding center が等速直線運動をし，漸近的には $T_B = 0$ の場合と同様な軌道で散乱するのではないかと予想できる．しかしながら，実はこの予想は間違っている．実際は T_0 の長さによって上記の (i), (ii), (iii) すべての状態が現れる．

今，パルス磁場を記述するハミルトニアンを

$$H_0(t) = \begin{cases} H_{\mathrm{L}} & t \in \cup_{n\in\mathbf{Z}}[nT, nT+T_B), \\ H_0^0 & t \in \cup_{n\in\mathbf{Z}}[nT+T_B, (n+1)T) \end{cases}$$

とおく．系の propagator は

$$U_0(t,0) = \begin{cases} e^{-i(t-nT)H_{\mathrm{L}}}(U_0(T,0))^n & t \in \cup_{n\in\mathbf{Z}}[nT, nT+T_B), \\ e^{-i(t-(nT+T_B))H_0^0}e^{-iT_BH_{\mathrm{L}}}(U_0(T,0))^n & t \in \cup_{n\in\mathbf{Z}}[nT+T_B, (n+1)T) \end{cases}$$

と書ける．この時，同様に位置の期待値を $x(t) = U_0(t,0)^* x U_0(t,0)$ とおけば，以下の定理を得る．

Theorem 3.1. 状態 (i), (ii), (iii) を決定づける時間 T_{Cr} を

$$T_{\mathrm{Cr}} = 4\cot(|\omega|T_B/4)/|\omega|$$

とおき，さらに $\bar{\omega} = \omega/2,\ T_0 = (T - T_B),\ L_{11} = \cos(\bar{\omega}T_B) - \bar{\omega}T_0\sin(\bar{\omega}T_B),\ L_{22} = \cos(\bar{\omega}T_B),\ \lambda_0 = (L_{11}+L_{22})/2,\ D/4 = \lambda_0^2 - 1,\ \lambda_\pm = \lambda_0 + \sqrt{D/4}$ とする．とおく．この時もし $T_0 > T_{\mathrm{Cr}}$ なら，

$$\lim_{n\to\pm\infty} |\lambda_\mp|^{-n} \|xU_0(t,0)\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0^2-1}} \|\{(L_{11}-\lambda_\pm)x + L_{12}p\}\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)^2} \qquad (3.1)$$

が成り立つ．ここで $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ であり，$L_{12} = \bar{\omega}T_0\cos(\bar{\omega}T_B) + \sin(\bar{\omega}T_B)$ である．また $T_0 = T_{\mathrm{Cr}}$ の時,

$$\lim_{n\to\pm\infty} |n|^{-1} \|xU_0(t,0)\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)^2} = \|\{(L_{11}-\lambda_0)x + L_{12}p\}\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)^2}$$

が成立する．

この定理で重要な事は $T_0 > T_{\mathrm{Cr}}$ の時 $\lambda_+\lambda_- = 1,\ \lambda_\pm \neq 1$ かつ $\lambda_\pm \neq -1$ であるので，$|\lambda_\mp|^{-n}$ のどちらか一方は指数的に減少しているはずである．にもかかわらず (3.1) 式が成立するためには $x(t) = U_0(t,0)^* x U_0(t,0)$ が指数的に増大する必要がある．これより，Korotyaev が予想した (iii) のケースがパルス磁場における $T_0 > T_{\mathrm{Cr}}$ であることが分かる．

論文 [2] では $T_0 < T_{\mathrm{Cr}}$ の時，粒子は束縛され，$T_0 = T_{\mathrm{Cr}}$ の時，粒子はアルキメデスの渦のような (少し異なるが) 軌道で散乱することを示した．また，$T_0 > T_{\mathrm{Cr}}$ のときに以下の仮定 **V** を満たす，非常に弱い相互作用 V の下で波動作用素の存在とその漸近完全性を示した．

Assumption V.
V は実数値関数で，ある $\rho > 0$ に対して，

$$|V(x)| \le C(1+|x|)^{-\rho}$$

を満たす．

また，波動作用素の存在を示す際に $T_0 > T_{\mathrm{Cr}}$ 以外にも条件が必要となる．本講演では，これらの結果について詳しく述べていきたい．

References

[1] Adachi, T., Kawamoto, M.: Avron-Herbst type formula in crossed constant magnetic and time-dependent electric fields, Lett. Math. Phys. (2012)
[2] Adachi, T., Kawamoto, M.: Quantum scattering in a periodically pulsed magnetic field, (preprint 2014)
[3] Korotyaev, E. L.: On scattering in an external, homogeneous, time-periodic magnetic field, Math. USSR-Sb. (1990)
[4] Loss, M., Thaller, B.: Scattering of particles by long-range magnetic fields, Ann. Phys. (1987)