SMALL DATA GLOBAL EXISTENCE AND SCATTERING FOR THE GENERALIZED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

瀬片 純市 (東北大学大学院理学研究科)

本研究は眞崎聡氏 (広島大・工学部) との共同研究に基づく．次の一般化 Korteweg-de Vries (gKdV) 方程式の初期値問題について考える．

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = \mu \partial_x (|u|^{\alpha-1} u), & t, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

ここに $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は未知関数, $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は既知の関数, $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ 及び $\alpha > 1$ は定数とする．

方程式 (1) は次のスケール不変性を持つ: $u(t,x)$ が (1) の解ならば, 任意の $\lambda > 0$ に対し,

$$u_\lambda(t,x) := \lambda^{\frac{2}{\alpha-1}} u(\lambda^3 t, \lambda x)$$

も (1) の解となる．ただし $u_\lambda(0,x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha-1}} u_0(\lambda x)$ である．Banach 空間 X が, スケール変換 $u_0(x) \mapsto \lambda^{\frac{2}{\alpha-1}} u_0(\lambda x)$ によりノルム不変となる時, X は (1) のスケール不変な空間であるという．

本講演の目的は, スケール不変な空間 $\hat{L}^{\frac{\alpha-1}{2}}$ において小さな初期値 u_0 に対し, (1) の大域解の存在および解の散乱を示すことである．ここで関数空間 $\hat{L}^r$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ は以下のように定義される．

$$\hat{L}^r = \hat{L}^r(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) | \, \|f\|_{\hat{L}^r} = \|\hat{f}\|_{L^{r'}} < \infty \},$$

ここに $\hat{f}$ は f の x に関する Fourier 変換である．

スケール不変な Sobolev 空間 $\dot{H}^{s_\alpha}$, $s_\alpha = 1/2 - 2/(\alpha-1)$ における時間大域解の存在に関してはいくつかの結果が知られている．Kenig-Pone-Vega [2] は方程式 (1) が質量優臨界, すなわち $\alpha \geqslant 5$ の場合に, $\dot{H}^{s_\alpha}$ において小さな初期値 u_0 に対し, (1) の大域解の存在および解の散乱を示した．方程式 (1) が質量劣臨界, すなわち $\alpha < 5$ の場合は指数 s_α が負になるため, 同様の結果を得ることが難しい．Tao [4] は Fourier 制限ノルムを用いることで, $\alpha = 4$ の場合に $\dot{H}^{s_4}$ において小さな初期値 u_0 に対し, (1) の大域解の存在および解の散乱を示した．その後, Koch-Marzuola [3] は Tao の証明を簡略化し, さらに Besov 空間 $\dot{B}^{s_4}_{\infty,2}$ において同様の結果を証明した．現在のところ $\alpha < 5$ の場合は, $\alpha = 4$ を除いて, スケール不変な空間における (1) の大域解の存在は知られていないようである．われわれは, 初期値のクラスとして $\hat{L}^{\frac{\alpha-1}{2}}$ を考えることにより $21/5 < \alpha < 23/3$ において (1) の大域解の存在を示すことができた．主定理を述べる前にいくつか記号を準備する．

定義 1. $(s,r) \in \mathbb{R} \times [1,\infty]$ とする．(s,r) が

$$1/r \in [0, 3/4), \qquad s \in \begin{cases} [-\frac{1}{2r}, \frac{2}{r}] & 0 \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2}, \\ (\frac{2}{r} - \frac{5}{4}, \frac{5}{2} - \frac{3}{r}) & \frac{1}{2} < \frac{1}{r} < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

をみたすとき, (s,r) を acceptable pair という．

区間 $I \subset \mathbb{R}$ と acceptable pair(s,r) に対し, 関数空間 $X(I;s,r)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} X(I;s,r) &:= \{f \in \mathcal{S}'(I \times \mathbb{R}) \mid \|f\|_{X(I;s,r)} < \infty\}, \\ \|f\|_{X(I;s,r)} &:= \||D_x|^s f\|_{L_x^{p(s,r)}(\mathbb{R};L_t^{q(s,r)}(I))}, \end{aligned}$$

ここに

$$\frac{2}{p(s,r)} + \frac{1}{q(s,r)} = \frac{1}{r}, \quad -\frac{1}{p(s,r)} + \frac{2}{q(s,r)} = s. \tag{2}$$

主定理は以下の通りである.

定理 1 ($\hat{L}^{\frac{\alpha-1}{2}}$ における時間局所適切性)**.** $21/5 < \alpha < 23/3$ とする. このとき初期値問題 *(1)* は $\hat{L}^{\frac{\alpha-1}{2}}$ において時間局所適切である. すなわち, 任意の $u_0 \in \hat{L}_x^{\frac{\alpha-1}{2}}(\mathbb{R})$ に対し, 時間区間 $I = I(u_0)$ が存在し, 以下を満たす *(1)* の解 u が一意に存在する*:*

$$u \in C(I; \hat{L}_x^{\frac{\alpha-1}{2}}(\mathbb{R})) \cap \bigcap_{(s,\frac{\alpha-1}{2}):acceptable} X(I;s,\frac{\alpha-1}{2}).$$

注意 1. $S(I;\frac{\alpha-1}{2}) := X(I;0,\frac{\alpha-1}{2})$ とおく. $S(I;\frac{\alpha-1}{2})$ のノルムは scattering norm と呼ばれ解の性質を導くのに重要な役割を果たす. 例えば解が爆発, あるいは散乱するための条件を *scattering norm* を用いて与えることができる.

定理 2 ($\hat{L}^{\frac{\alpha-1}{2}}$ の小さな初期値に対する時間大域的適切性)**.** $21/5 < \alpha < 23/3$ とする. このとき $\varepsilon > 0$ が存在して, $u_0 \in \hat{L}_x^{\frac{\alpha-1}{2}}(\mathbb{R})$ が $\|u_0\|_{\hat{L}_x^{\frac{\alpha-1}{2}}} < \varepsilon$ をみたすならば, *(1)* の解 u は一意的に存在する. さらに u は

$$\|u\|_{L_t^\infty(\mathbb{R};\hat{L}_x^{\frac{\alpha-1}{2}})} + \|u\|_{S(\mathbb{R};\frac{\alpha-1}{2})} \leqslant 2\|u_0\|_{\hat{L}_x^{\frac{\alpha-1}{2}}}$$

をみたし, $t \to \pm\infty$ において散乱する.

定理 1, 2 は縮小写像の原理により示されるが, 証明の鍵となるのは次の Airy 方程式に対する Stein-Tomas 型不等式である:

$$\left\| |D_x|^{1/r} e^{-t\partial_x^3} f \right\|_{L_{t,x}^r(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} \leqslant C \|f\|_{\hat{L}^{r/3}}, \tag{3}$$

ただし $r \in (4,\infty]$ である. この不等式は $r = 6$ のときは Strichartz 評価式として知られており, 不等式 (3) は Strichartz 評価式の一般化と見なすことができる. Schrödinger 方程式に対しては Fefferman [1] により類似の評価式が知られている. 本講演では, 主に定理 1, 2 の証明の概略について触れるが, 時間があれば最小非散乱解の存在についても触れたい.

References

[1] Fefferman C., *Inequalities for strongly singular convolution operators.* Acta Math. **124** (1970) 9–36.

[2] Kenig C.E., Ponce G. and Vega L., *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle.* Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993) 527–620.

[3] Koch H. and Marzuola J.L., *Small data scattering and soliton stability in* $\dot{H}^{-\frac{1}{6}}$ *for the quartic KdV equation.* Anal. PDE **5** (2012), 145–198.

[4] Tao T., *Scattering for the quartic generalised Korteweg-de Vries equation.* J. Differential Equations **232** (2007), 623–651.