# ON A STABILITY OF HEAT KERNEL ESTIMATES UNDER FEYNMAN-KAC PERTURBATIONS FOR SYMMETRIC MARKOV PROCESSES

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

## 1. Statement of result

この講演は金大弘氏との共同研究 [3, 4, 5, 6, 7] に基づく．$(E,d)$ を局所コンパクト可分距離空間, $E_\partial$ をその一点コンパクト化とし, $\mathfrak{m}$ を $\mathrm{supp}[\mathfrak{m}]=E$ を満たす $E$ 上の正値 Radon 測度とする．$\mathscr{B}(E)$ を $E$ 上のボレル集合の全体, $\mathcal{B}(E)$ を $E$ 上のボレル関数の全体, $\mathcal{B}_b(E)$ を $E$ 上の有界ボレル関数の全体とする．$\mathbf{X}=(\Omega, X_t, \zeta, \{\mathbf{P}_x\}_{x\in E})$ を $E$ 上の $\mathfrak{m}$-対称マルコフ過程とする．ここで $\Omega := D([0,+\infty[\to E)$ は $E$ に値をとる右連続左極限をもつ道の空間で, $X_t(\omega):=\omega(t)$ は道 $\omega\in\Omega$ の時刻 $t$ での位置, $\zeta(\omega):=\inf\{t>0\mid X_t(\omega)\notin E\}$ は生存時間といい, $X_t$ が無限遠 $\partial$ に到達する最小時刻である．$\mathbf{P}_x$ は時刻 0 で $x\in E$ から出発する道全体の上に乗っている確率測度である．ここで $\mathfrak{m}$-対称とは推移半群 $P_tf(x):=\mathbf{E}_x[f(X_t)]$ が $f,g\in L^2(E;\mathfrak{m})\cap\mathcal{B}(E)$ に対して $(P_tf,g)_{\mathfrak{m}}=(f,P_tg)_{\mathfrak{m}}$ を満たすことする ($(f,g)_{\mathfrak{m}}:=\int_E fg\mathrm{d}\mathfrak{m}$ は $L^2$-内積). $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $\mathbf{X}$ に対応する対称ディリクレ形式とする (対応は $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から決まる強連続 $L^2$-縮小半群の族 $(T_t)_{t\geq0}$ が $T_tf=P_tf$ $\mathfrak{m}$-a.e. を満たすことする). 対称ディリクレ形式の一般論から $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は Beurling-Deny 分解と呼ばれる以下の分解式を満たすことが知られる ([2]): $f,g\in\mathcal{F}$

$$\mathcal{E}(f,g)=\mathcal{E}^c(f,g)+\int_{E\times E\setminus\mathsf{diag}}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)+\int_E fg\mathrm{d}\kappa.$$

ここで $J$ は $E\times E\setminus\mathsf{diag}$ 上の正値ラドン測度でその周辺測度が $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の容量零集合に質量を持たないものであり**飛躍測度**と呼ばれ, $\kappa$ も正値ラドン測度で $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の容量零集合に質量を持たないもので**消滅測度**と呼ばれる．$\mathcal{E}^c$ を $\mathcal{E}$ の**拡散項**といい, 第 2 項は $\mathcal{E}^j(f,g)$ と表され $\mathcal{E}$ の**飛躍項**という．最後の項は $\mathcal{E}^k(f,g)$ と表され $\mathcal{E}$ の**消滅項**と呼ばれる．$\mathcal{E}^c(f,g)=\frac{1}{2}\mu^c_{\langle f,g\rangle}(E)$ を満たす符号値測度 $\mu^c_{\langle f,g\rangle}$ が $f,g\in\mathcal{F}$ に対し存在して**拡散項のエネルギー測度**と呼ばれる．また符号値測度 $\mu^j_{\langle f,g\rangle}(\mathrm{d}x):=2\int_E(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ を**飛躍項のエネルギー測度**, $\mu^k_{\langle f,g\rangle}(\mathrm{d}x)=f(x)g(x)\kappa(\mathrm{d}x)$ を**消滅項のエネルギー測度**といい, 総和である $\mu_{\langle f,g\rangle}:=\mu^c_{\langle f,g\rangle}+\mu^j_{\langle f,g\rangle}+2\mu^k_{\langle f,g\rangle}$ を $f,g\in\mathcal{F}$ の**エネルギー測度**という．$\mathcal{E}(f,g)=\frac{1}{2}\mu_{\langle f,g\rangle}(E)$ が成立する．$\mathcal{E}=\mathcal{E}^c$ なら $\mathbf{X}$ を**拡散過程** (標本路は連続で内部消滅しない) といい $\mathcal{E}=\mathcal{E}^j$ なら $\mathbf{X}$ を**純飛躍過程**という (標本路は軌跡の形状が点から点への飛躍のみで内部消滅しない), それ以外は一般に標本路が不連続なものになる．講演を通して消滅項がないものとし, $\mathbf{X}$ が各点で定義される熱核 $]0,+\infty[\times E\times E\ni(t,x,y)\mapsto p_t(x,y)$ で $t>0$, $x\in E$ 毎に $y\mapsto p_t(x,y)$ の細位相での連続性を満たすものを許容することを仮定する, つまり $P_tf(x)=\int_E p_t(x,y)f(y)\mathfrak{m}(\mathrm{d}y)$, $f\in\mathcal{B}_b(E)$ が成立する．$\mathbf{X}$ に既約性の条件 **(I)** を満たすことを要請する．**(I)** の定義をここでは与えない

が, 熱核が非退化であればこの条件は満たされる. また $\mathbf{X}$ が次の意味で有界な摂動で安定的であることを要請する:

**仮定 1.1.** $(\widetilde{\mathcal{E}},\widetilde{\mathcal{F}})$ を $\widetilde{\mathcal{F}}=\mathcal{F}$ を満たす $L^2(E;\widetilde{\mathfrak{m}})$ 上の別のディリクレ形式で内部消滅項を持たないものとする. 正定数 $C_E>0$ が存在して $C_E^{-1}\mathfrak{m}\le\widetilde{\mathfrak{m}}\le C_E\mathfrak{m}$ かつ $i=c,j$ 毎に

$$C_E^{-1}\mathcal{E}^i(f,f)\le\widetilde{\mathcal{E}}^i(f,f)\le C_E\mathcal{E}^i(f,f)\quad \text{for } f\in\mathcal{F}=\widetilde{\mathcal{F}}.$$

が成立すれば $(\widetilde{\mathcal{E}},\widetilde{\mathcal{F}})$ on $L^2(E;\widetilde{m})$ が $t>0$, $x\in E$ 毎に $y\mapsto\widetilde{p}_t(x,y)$ の細位相での連続性をもつ熱核 $\widetilde{p}_t(x,y)$ を許容し正定数 $C_p>0$ と $k\ge 0$ がとれて

$$C_p^{-1}e^{-kt}p_t(x,y)\le\widetilde{p}_t(x,y)\le C_pe^{kt}p_t(x,y)\quad t>0,\quad x,y\in E \tag{1.1}$$

が成立する. (1.1) を $\widetilde{p}_t(x,y)\asymp_k p_t(x,y)$ と表現する.

仮定 1.1 を満たす例として例えば非負リッチ曲率をもつ完備リーマン多様体上のブラウン運動や非コンパクトなフラクタル集合上の拡散過程, 対称安定型過程や相対論的対称安定型過程などである. 前者の２つの例では体積２倍条件 (VD) と局所ポアンカレ不等式 (PI) が放物型ハルナック不等式 (PHI) と同値で, さらに熱核のガウス型上下評価 (GHE) と同値であることに基づく. 後者の２つの純飛躍型過程の場合は Chen-Kumagai の諸論文の結果に基づく.

$A_t^\mu$ を時間に関して局所有界変動な連続加法的汎関数で $\mu=\mu_1-\mu_2$ を対応する符号値 smooth 測度とし, $A_t^F:=\sum_{s\le t}F(X_{s-},X_s)$ を直積空間 $E\times E$ 上の対称で対角線上で退化する非負有界ボレル関数 $F_1,F_2$ で定義される $F=F_1-F_2$ に対応する非局所型加法汎関数とする. $(N,H)$ をマルコフ過程 $\mathbf{X}$ の **Lévy 系**とする: $H_t$ はポテンシャル $x\mapsto\mathbf{E}_x[\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}H_t]$ が有界となる正値連続加法的汎関数, $N(x,\mathrm{d}y)$ は $\mathbf{X}$ の飛躍を記述する核で $E_\partial\times E_\partial$ 上の非負ボレル関数 $\phi$ に対し

$$\mathbf{E}_x\left[\sum_{s\le t}\phi(X_{s-},X_s)\right]=\mathbf{E}_x\left[\int_0^t\int_E\phi(X_s,y)N(X_s,\mathrm{d}y)\mathrm{d}H_s\right]$$

を満たすものである. 上述のボレル関数 $\phi$ に対し, $N(\phi)(x):=\int_{E_\partial}\phi(x,y)N(x,\mathrm{d}y)$ と記す. $\phi$ が $E\times E$ 上のみで定義されるときは $\phi(x,\partial)=0$, $x\in E$ と規約する.
$H_t$ に対応する正値 smooth 測度を $\mu_H$ とする. $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}N(x,\mathrm{d}y)\mu_H(\mathrm{d}x)$, $\kappa(\mathrm{d}x)=N(x,\{\partial\})\mu_H(\mathrm{d}x)$ が成立する.
$R_\alpha(x,y):=\int_0^\infty e^{-\alpha t}p_t(x,y)\mathrm{d}t$ を **$\alpha$-位のレゾルヴェント核**, $R(x,y):=\int_0^\infty p_t(x,y)\mathrm{d}t$ を **0-位のレゾルヴェント核**または**グリーン核**または**グリーン関数**という.
$S_K^1(\mathbf{X})$(resp. $S_{EK}^1(\mathbf{X})$, $S_D^1(\mathbf{X})$) を**加藤クラス** (resp. **拡張された加藤クラス**, **ディンキンクラス**) の測度の全体とする:

- $\mu\in S_K^1(\mathbf{X})\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\lim_{\beta\to\infty}\sup_{x\in E}\int_E R_\beta(x,y)\mu(\mathrm{d}y)=0.$
- $\mu\in S_{EK}^1(\mathbf{X})\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\lim_{\beta\to\infty}\sup_{x\in E}\int_E R_\beta(x,y)\mu(\mathrm{d}y)<1.$
- $\mu\in S_D^1(\mathbf{X})\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\sup_{x\in E}\int_E R_\alpha(x,y)\mu(\mathrm{d}y)<\infty$ for $\forall/\exists\alpha>0.$

0-位のディンキンクラス測度を**グリーン有界測度**といい, その全体を $S_{D_0}^1(\mathbf{X})$ で表す: $\mu\in S_{D_0}^1(\mathbf{X})\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\sup_{x\in E}\int_E R(x,y)\mu(\mathrm{d}y)<\infty.$
$u\in\mathcal{F}\cap C_\infty(E)$ で $\mu_{\langle u\rangle}\in S_D^1(\mathbf{X})$ を満たすものに対し, $N_t^u$ を $u(X_t)-u(X_0)$ の**福島分解公式** ([2]) で出現するエネルギー零の連続加法的汎関数とする:

$$u(X_t)-u(X_0)=M_t^u+N_t^u\quad t\in[0,+\infty[\quad \mathbf{P}_x\text{-a.s. for all } x\in E. \tag{1.2}$$

ここで $M_t^u$ は福島分解 (1.2) の **(局所) マルチンゲール部分**と呼ばれる．$N_t^u$ は時間に関して必ずしも局所有界変動になるわけではないが, $u=R_\alpha f$, $f\in L^2(E;\mathfrak{m})\cap\mathcal{B}_b(E)$ なら $N_t^u=\int_0^t(\alpha u-f)(X_s)\mathrm{d}s$ となり, これは時間に関して局所有界変動になる．加法的汎関数 $A_t:=N_t^u+A_t^\mu+A_t^F$ を考え,

$$e_A(t):=\exp(A_t),\quad t\geq 0 \tag{1.3}$$

とする．乗法的汎関数 (1.3) は一般化されたファインマン・カッツ半群 $(P_t^A)_{t\geq0}$ を定める:

$$P_t^Af(x):=\mathbf{E}_x[e_A(t)f(X_t)],\quad f\in\mathcal{B}_b(E),\ t\geq 0. \tag{1.4}$$

仮定 1.1の下でどのような条件を $u$, $\mu$, $F$ に課せば (1.4) の積分核 $p_t^A(x,y)$ が存在して $p_t^A(x,y)\asymp_k p_t(x,y)$ が成立するかを紹介するのが講演の目的である．

$\mu_{\langle u\rangle}+\mu_1+\mu_2+N(F_1+F_2)\mu_H\in S_D^1(\mathbf{X})$ とする．$(\mathcal{Q},\mathcal{F})$ を (1.4) に対応する $L^2(E;\mathfrak{m})$ 上の閉２次形式とする．それは次で与えられる ([1]):

$$\mathcal{Q}(f,g):=\mathcal{E}(f,g)+\mathcal{E}(u,fg)-\mathcal{H}(f,g)\quad f,g\in\mathcal{F}. \tag{1.5}$$

ここで

$$\mathcal{E}(u,fg):=\frac{1}{2}\int_E f\mathrm{d}\mu_{\langle u,g\rangle}+\frac{1}{2}\int_E g\mathrm{d}\mu_{\langle u,f\rangle},$$

$$\mathcal{H}(f,g):=\int_E f(x)g(x)\mu(\mathrm{d}x)+\int_E\int_E f(x)g(y)(e^{F(x,y)}-1)N(x,\mathrm{d}y)\mu_H(\mathrm{d}x).$$

$\alpha\geq0$ に対し $\mathcal{Q}_\alpha(f,g):=\mathcal{Q}(f,g)+\alpha(f,g)_\mathfrak{m}$, $\mathcal{Q}(f,g):=\mathcal{Q}_0(f,g)$ for $f,g\in\mathcal{F}$ とし, 測度 $\eta\in S_{D_0}^1(\mathbf{X})$ に対し,

$$\lambda^{\mathcal{Q}_\alpha}(\eta):=\inf\left\{\mathcal{Q}_\alpha(f,f)\;\middle|\;f\in\mathcal{F}\cap C_0(E),\ \int_E f^2\mathrm{d}\eta=1\right\}. \tag{1.6}$$

符号値測度 $\bar\mu:=\bar\mu_1-\bar\mu_2$ を $\bar\mu_1:=N(V)\mu_H+\mu_1+\frac12\mu^c_{\langle u\rangle}$, $\bar\mu_2:=N(F_2)\mu_H+\mu_2$ で定める． ここで $V(x,y):=(e^{F^u}-F^u-1+F_1)(x,y)$, で $F^u(x,y):=F(x,y)+u(x)-u(y)$.

$S^1_{NK_1}(\mathbf{X})$ を**自然な半グリーン緊密な拡張加藤クラス測度**の全体, $S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X})$ を**自然なグリーン緊密な加藤クラス測度**の全体, $S^1_{CS_1}(\mathbf{X})$ を**条件付半グリーン緊密な拡張加藤クラス測度**の全体, $S^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})$ を**条件付きグリーン緊密な加藤クラス測度**の全体, $S^1_{DS_0}(\mathbf{X})$ を**条件付きグリーン有界な測度**の全体とする (これらは講演の中で正確な定義を与える)．$\mathbf{X}$ が**過渡的** (transient) とは $\mathfrak{m}(f=0)=0$ を満たす関数 $f\in L^1_+(E;\mathfrak{m})$ で $Rf(x)<+\infty$ $\mathfrak{m}$-a.e. $x\in E$ を満たすものが存在するとする．

**定理 1.2.** $\mathbf{X}$ が過渡的とする．仮定 1.1 が $k=0$ で満たされるとし, $\mu_1+N(e^{F_1}-1)\mu_H\in S^1_{NK_1}(\mathbf{X})$, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X})$ と $\mu_2+N(F_2)\mu_H\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ を仮定する．このとき,

(1) $F_2=0$ とする． $\lambda^{\mathcal{Q}}(\bar\mu_1)>0$ ならば積分核 $p_t^A(x,y)$ が各点で存在して, $p_t^A(x,y)\asymp_k p_t(x,y)$ *with* $k=0$.

(2) $\mu_1+N(e^{F_1}-1)\mu_H\in S^1_{CS_1}(\mathbf{X})$, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})$ と $\mu_2+N(F_2)\mu_H\in S^1_{DS_0}(\mathbf{X})$ を仮定すれば (1) の逆の主張が成立する．

$\alpha>0$ を固定する．$\mathbf{X}^{(\alpha)}$ を比率 $e^{-\alpha t}$ で消滅される $\mathbf{X}$ の $\alpha$-部分過程とする．つまり $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ は推移半群が $P_t^{(\alpha)}f(x):=e^{-\alpha t}P_tf(x)$ で与えられることで定められる．$\mathbf{X}$ が過渡的でなくても $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ は常に過渡的になる．

**系 1.3.** 仮定 1.1 が $k\geq 0$ で満たされるとし, $\mu_1+N(e^{F_1}-1)\mu_H\in S^1_{NK_1}(\mathbf{X}^{(\alpha)})$, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{NK_\infty}(\mathbf{X}^{(\alpha)})$ と $\mu_2+N(F_2)\mu_H\in S^1_{D_0}(\mathbf{X}^{(\alpha)})$ が成立すると仮定する．このとき,

(1) $F_2=0$ とする．$\lambda^{\mathcal{Q}_\alpha}(\bar{\mu}_1)>0$ ならば積分核 $p_t^A(x,y)$ が各点で存在して $p_t^A(x,y)\asymp_k p_t(x,y)$ がある $k=k(\alpha)>0$ で成り立つ．

(2) $\mu_1+N(e^{F_1}-1)\mu_H\in S^1_{CS_1}(\mathbf{X}^{(\alpha)})$, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_{CS_\infty}(\mathbf{X}^{(\alpha)})$ と $\mu_2+N(F_2)\mu_H\in S^1_{DS_0}(\mathbf{X}^{(\alpha)})$ を仮定する．$p_t^A(x,y)\asymp_k p_t(x,y)$ がある $k\geq 0$ で成り立てば $\lambda^{\mathcal{Q}_\alpha}(\bar{\mu}_1)>0$ が $\alpha>k$ で成立する．

系 1.3(1) の証明を変換後のマルコフ過程に適用して, 次の結果を得る．これは低階項の摂動による熱核の上下評価に関する既存の結果を全て包括するものである．

**定理 1.4.** 仮定 1.1 がある $k\geq 0$ で成立するとする．$\mu_1+N(e^{F_1}-1)\mu_H\in S^1_{EK}(\mathbf{X})$, $\mu_{\langle u\rangle}\in S^1_K(\mathbf{X})$, $\mu_2+N(F_2)\mu_H\in S^1_D(\mathbf{X})$ とする．また $F_2=0$ を仮定する．このとき $p_t^A(x,y)\asymp_k p_t(x,y)$ がある $k\geq 0$ で成立する．

定理 1.2(1) の証明は, 当該条件の下で [3, 4] で確立された $\lambda^{\mathcal{Q}}(\bar{\mu}_1)>0$ と (1.3) の gaugeability: $\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x[e_A(\zeta)]<\infty$ との同等性に基づいて, Markov 過程の Girsanov 変換と Feynman-Kac 変換, Doob の $h$ 変換を経由し, 伊藤の公式を途中で用いて示される．定理 1.2(2) の証明は当該条件の下で [3, 4] で確立された $\lambda^{\mathcal{Q}}(\bar{\mu}_1)>0$ と (1.3) の**劣臨界性** (subcriticality): $R^A(x,y)<\infty$, $(x,y)\in E\times E\setminus\mathsf{d}$ (ここで $\mathsf{d}:=\{(x,y)\in E\times E\mid R(x,y)=+\infty\}$) との同値性に基づく．系 1.3の証明は定理 1.2の証明とほぼ同じであるが余分な項が出現するため定理 1.2よりも主張が弱くなる．定理 1.4の証明は, 変換後のマルコフ過程 $\mathbf{Z}$ に対して $\nu\in S^1_{EK}(\mathbf{Z})$ (resp. $\nu\in S^1_D(\mathbf{Z})$) なら十分大きい $\alpha>0$ で $\nu\in S^1_{NK_1}(\mathbf{Z}^{(\alpha)})$ (resp. $\nu\in S^1_{D_0}(\mathbf{Z}^{(\alpha)})$) とできること, およびそのような $\alpha>0$ で $\lambda^{\mathcal{Q}_\alpha}(\bar{\mu}_1)>0$ とできることで系 1.3(1) と同様な証明でなされる．

## References


[1] Z.-Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, K. Kuwae and T.-S. Zhang, *On general perturbations of symmetric Markov processes*, J. Math. Pures et Appliquées **92** (2009), no. 4, 363–374.

[2] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Second revised and extended edition. de Gruyter Studies in Mathematics, **19**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

[3] D. Kim, M. Kurniawaty and K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals, II*, draft in preparation 2015.

[4] D. Kim and K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals*, 2015, to appear in Transactions of Amer. Math. Soc.

[5] D. Kim and K. Kuwae, *General analytic characterization of gaugeability for Feynman-Kac functionals*, preprint (2013).

[6] D. Kim and K. Kuwae, *On a stability of heat kernel estimates under generalized non-local Feynman-Kac perturbations for stable-like processes*, Festschrift Masatoshi Fukushima, Interdisciplinary Mathematical Sciences, **17**, World Scientific, (2015).

[7] D. Kim and K. Kuwae, *On a stability of heat kernel estimates under Feynman-Kac perturbations for symmetric Markov processes*, preprint, 2015.