On an approximate scheme for a distance function of evolving interfaces

北海道大学大学院理学研究院数学部門　浜向 直 *

1　序

有界開集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ に対し，境界 $\partial\Omega$ への距離関数 $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y\in\partial\Omega} |x - y|$ は，アイコナール方程式，

$$|\nabla u(x)| = 1 \quad \text{in } \Omega \tag{E}$$

の斉次ディリクレ条件を満たす一意的な粘性解であることが知られている．つまり距離関数が粘性解として特徴付けられる．実際に解であることの証明については [1, Corollary 3.4.5 (i)(ii), Remark 5.6.1]，比較定理 (解の一意性) については [3] を参照のこと．今度は，時間と共に動く曲面 (界面) の $\Gamma_t \subset \mathbf{R}^n$ が与えられているとする．そして D_t を Γ_t の「内側」とするとき，Γ_t への符号付き距離関数 d を，

$$d(x,t) := \begin{cases} \mathrm{dist}(x, \Gamma_t) & (x \in D_t \text{ のとき}), \\ -\mathrm{dist}(x, \Gamma_t) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める．この d は時間発展型の偏微分方程式の解とどのような関係があるだろうか．定常の場合と大きく異なるのは，$\mathrm{dist}(\cdot, \partial\Omega)$ は連続関数 (さらに言えば 1-リプシッツ関数) であるのに対し，d は時間変数に関して不連続になりうる点である．例えばある時刻で界面が消滅すると，界面への距離はその点の周りで瞬間的に大きくなる．このため，連続な関数が一意解となるような問題の解として d を特徴付けることはできない．

本研究では Γ_t がハミルトン・ヤコビ方程式の解のゼロ等高面として与えられる場合を考える．すなわち，

$$u_t(x,t) = H(x, \nabla u(x,t)) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,T) \tag{HJ}$$

の初期値問題の解 u を用いて，$\Gamma_t = \{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x,t) = 0\}$ かつ $D_t = \{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x,t) > 0\}$ であるとする．例えば $H(x,p) = c(x)|p|$ ならば法速度 $c(x)$ で動く界面，$H(x,p) = -\langle X(x), p\rangle$ ならばベクトル場 X に沿って動く界面を表す．なお初期値を $d(x,0)$ として取っても，(HJ) の解は一般に $d(x,t)$ ではない．さて d を得るために，正のパラメータ $\theta > 0$ を含む新たな方程式，

$$u^\theta_t(x,t) = H(x, \nabla u^\theta(x,t)) + \theta\beta(u^\theta)(1 - |\nabla u^\theta(x,t)|) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,T) \tag{HJ$^\theta$}$$

を考える．ここで β は，典型的には符号関数を滑らかにしたものを取る．粘性解の u^θ は連続である．形式的には，θ が十分大きいとき $|\nabla u^\theta(x,t)| \approx 1$ なので，$\theta \to \infty$ のときに u^θ が (E) の解である距離関数 d に収束していくと考えられる．この考察は d が連続なときには，局所一様収束の意味で比較的簡単に正当化される．従って (HJ$^\theta$) の解の極限として d が得られる．しかし d が連続ではない場合は局所一様収束は期待できないため，どのような意味で $u^\theta \to d$ と言えるかを調べる必要がある．

本研究で導入した方程式 (HJ$^\theta$) については等高面の数値計算への応用が考えられる．界面の動きを計算機で求める際，ゼロ等高面の付近で解の傾きが 0 に近づくと界面を正確に取り出すことが困難になる．解 u^θ が距離関数に近いことで，その問題が解消されることが期待される．なお本講演の内容は [2] に収録予定である．

* E-mail: hnao@math.sci.hokudai.ac.jp

2 主結果

符号付き距離関数 d が連続な場合は，

定理 1. d が $\mathbf{R}^n \times (0,T)$ 上で連続ならば，u^θ は d に $\theta \to \infty$ のとき $\mathbf{R}^n \times (0,T)$ 上で局所一様収束する．

証明では，粘性解理論でしばしば登場する緩和極限：

$$\overline{u}(x,t) := \limsup_{(y,s,\theta)\to(x,t,\infty)} u^\theta(y,s), \quad \underline{u}(x,t) := \liminf_{(y,s,\theta)\to(x,t,\infty)} u^\theta(y,s) \tag{2.1}$$

を用いる．このとき D_t 上で，$\overline{u}(\cdot,t)$ は (E) の粘性劣解，$\underline{u}(\cdot,t)$ は (E) の粘性優解となる．距離関数の $d(\cdot,t)$ は (E) の解であるから，比較定理より $\overline{u} \leqq d$ と $d \leqq \underline{u}$ が出る．定義より $\underline{u} \leqq \overline{u}$ であるから，これら 3 つの不等式を合わせて結論を得る．一方で d が連続とは限らない一般の場合は，次の収束が成り立つ．

定理 2. 各 $(x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,T)$ に対し，$\displaystyle\lim_{\substack{(y,s,\theta)\to(x,t,\infty)\\ s\leqq t}} u^\theta(y,s) = d(x,t)$ である．

つまり，前の時間からの極限を取れば $u^\theta \to d$ ということである．連続性を d に課さない場合，定理 1 の 3 つの不等式のうち $\overline{u} \leqq d$ が成り立たなくなる．これは $\overline{u}$ が斉次ディリクレ条件を満たさず，d との比較定理が適用できなくなるからである．そこで d で評価できるような極限として，前の時間からの緩和極限を導入する：

$$\overline{u}'(x,t) := \limsup_{\substack{(y,s,\theta)\to(x,t,\infty)\\ s\leqq t}} u^\theta(y,s). \tag{2.2}$$

これに対しては D_t 上で $\overline{u}' \leqq d$ が示され，定理 2 の結論が出る．なおこの証明の過程で次のことも分かる：

(1) 各 $t \in (0,T)$ に対し，$u^\theta(\cdot,t)$ は $d(\cdot,t)$ に $\theta \to \infty$ のとき $\mathbf{R}^n$ 上で局所一様収束する．
(2) 各 $t \in (0,T)$ に対し，$\overline{D_t}$ 上で $\underline{u} = d$ である．($\overline{u} = d$ は正しくない．)

従来の (2.1) でうまくいかない理由は，直観的には，界面が消滅するとき，消滅後の時間の情報も巻き込んで極限が定義されるから，と言える．そこで (2.2) のような極限概念が自然に考えられる．なお界面の「消滅」と反対の概念として「出現」が考えられるが，これは実は起きない．ハミルトン・ヤコビ方程式の解の有限伝播性から従う事実である．

数値計算への応用，つまりゼロ等高面の付近で傾きの小さくない解を得るという観点からは，(HJ$^\theta$) の右辺の $(1-|\nabla u^\theta(x,t)|)$ をその正部分 $(1-|\nabla u^\theta(x,t)|)_+$ で置き換えた方程式も良い解を与える．このとき d への収束は一般に成り立たないものの，$\overline{D_t}$ 上で $d \leqq \sup_{\theta>0} u^\theta$ であることが証明できる．

参考文献

[1] P. Cannarsa, C. Sinestrari, Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[2] N. Hamamuki, E. Ntovoris, A rigorous setting for the reinitialization of first order level set equations, in preparation.

[3] H. Ishii, A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 2, 247–251.