$p(x)$-エネルギーを最小化する写像の正則性について

立川 篤（東京理科大学・理工学部・数学科）

写像 $u : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad (\Omega \Subset \mathbb{R}^m)$ に対して，汎関数 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega f(x, u, Du)dx$$

により定義する．ただし，$f(x, u, \xi) : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ は各変数に関する連続性等について適当な条件を満たす関数で，特に ξ に関する増大度について次の条件を満たすとする．

[Growth condition] ある定数 $\Lambda \geq \lambda > 0, \quad q \geq p \geq 1$ に対して

$$\lambda|\xi|^p \leq f(x, u, \xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^2)^{q/2} \quad \forall(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}$$

が成り立つ．

$p = q =$ 定数 のとき，*standard growth*，それ以外の場合は *non-standard growth* と呼ばれている．この *non-standard growth* の特別な場合として，ある関数 $p : \Omega \to [1, \infty)$ に対して，

$$\lambda|\xi|^p(x) \leq f(x, u, \xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^2)^{p(x)/2} \quad \forall(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}$$

を満たす場合を $p(x)$-*growth* と呼ぶ．

本講演では，$p(x)$-*growth* の汎関数の典型的な例として，$p(x)$-*energy*

$$\mathcal{E}(u; \Omega) := \int_\Omega \left(g^{\alpha\beta}(x)h_{ij}(u)D_\alpha u^i(x)D_\beta u^j(x)\right)^{p(x)/2} dx,$$

（$(g^{\alpha\beta}(x))$，$(h_{ij}(u))$ は対称な正定値行列）を考える．$\mathcal{E}$ を最小化するする写像の，定義域内部における部分正則性，境界上での正則性に関する結果について報告する．