弱い消散項を持つ非線形膜方程式の
時間大域適切性と解の拡散現象

竹田 寛志 (福岡工大・工)

本講演では, 次の弱い消散項を持つ非線形膜方程式の初期値問題について考える：

$$
\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_t u + \Delta_x^2 u - \Delta_x u = \nabla \cdot F(\nabla u), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1}
$$

ここで, ベクトル値関数の非線形項 $F = F(v)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は十分滑らかで, $v \in \mathbb{R}^2$ に対して, $|F(v)| \le C|v|^p$ $(p \ge 2)$ を満たすものとする.

初期値問題 (1) は弱い消散項 $\partial_t u$ に起因に起因する解の消散効果と四階微分項 $\Delta^2 u$ から導かれる分散型方程式の性質を併せ持つ. これらの性質は

- $s \ge 1$
- 重み付き Sobolev 空間

$$
H^{s,\ell} := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) | (1+|x|^2)^{\frac{\ell}{2}} \partial_x^k u \in L^2(\mathbb{R}^2),\ 0 \le k \le s\}
$$

- 空間二次元の熱核 $G_t(x)$ と初期値から決まる定数 M

$$
G_t(x) := \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \qquad M := \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) + u_1(x)\, dx
$$

なる記法を用いて以下のように定式化できる. まず, 初期値問題 (1) の消散構造は次のように述べられる.

定理 1 (解の拡散現象)**.** $(u_0, u_1) \in H^{s+2,0} \cap L^1 \times H^{s,0} \cap L^1$ でそのノルムが十分小さいとき, 初期値問題 (1) は,

$$
u(t) \in C([0,\infty); H^{s+2,0})
$$

となる時間大域解を一意的に持ち, さらに, 時間減衰評価

$$
\|\nabla^k u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}} \text{ for } 0 \le k \le s+2, \tag{2}
$$

$$
\|\nabla^k (u(t) - MG_t)\|_{L^2} = o(t^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}) \text{ as } t \to \infty \text{ for } 0 \le k \le s+2, \tag{3}
$$

が成り立つ.

注意 2. 時間減衰評価 (2) と (3) は併せて, 解の拡散現象と言われる. 特に, (3) は時間大域的な解の挙動を示すだけでなく, 解の減衰評価 (2) の最適性も示唆している. また, 解の拡散現象に関して, 消散型波動方程式, 強消散型波動方程式などの各種消散項を持つ方程式に対して多くの先行研究がある ([1]-[9], [11]-[13], [15] 参照).

これに対し, 線形主要部の分散性に着目すれば, 以下が従う.

定理 3 (時間大域適切性)**.** $(u_0, u_1) \in H^{s+2,0} \times H^{s,0}$ でそのノルムが十分小さいとき, 初期値問題 (1) は,

$$
u(t) \in C([0,\infty); H^{s+2,0})
$$

となる時間大域解を一意的に持つ.

注意 4. 定理 3 は, 初期値問題 (1) の時間大域解の一意存在, 初期値連続依存性, 統徹性を主張する. これらの性質は併せて, (Hadamard の意味での) 時間大域適切性と言われる.

定理 1, 定理 3 はそれぞれ方程式の性質の一方に着目し, その導出のため解を構成する関数空間や初期値を選んでいた. 一方, 我々の目的は, 初期値問題 (1) に共存する「消散効果」と「分散性」を併用し, 解の拡散現象が成り立つような関数空間において時間大域適切性を示すことである;

定理 5. $H^{s+2,0} \cap H^{0,2} \cap H^{2,1}$ において初期値が十分小さければ, 非線形消散型膜方程式の初期値問題 (1) に対して, 時間大域適切性と解の拡散現象 (2) (3) が成り立つ.

注意 6. 定理 5 は線形主要部における $\Delta^2 u$ のような空間拡散の高階化は, 必ずしも有用に働くとは限らないことを示す. 特に, 高階微分項により, 重み付き評価に対する正則性の損失が引き起こされる ([14]). これは (高階微分項のない) 空間二階の消散型波動方程式には現れない性質である. また, このような問題は, すでに藤田型非線形項を持つ非線形消散型波動方程式において考察されており ([1], [2]), この場合, 解の拡散現象と時間大域適切性が, 適切に s と ℓ を選べば, $H^{s,0} \cap H^{0,\ell}$ のように重みのない Sobolev 空間と重み付き L^2 空間で従うことが示されている.

次に, 初期値問題 (1) に対する時間大域適切性において, 初期値の大きさの制限の必要性を確認する. そこで, 非線形項を

$$F(\nabla u) = -|\nabla u|^{p-1}\nabla u \qquad (p \geq 2) \tag{4}$$

と限定し, 方程式から従うエネルギー

$$E[u](t) := \frac{1}{2}\left\{\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2\right\} - \frac{1}{p+1}\|\nabla u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

に着目する. このとき, 初期エネルギー $E[u](0)$ における非線形項の寄与 $\dfrac{1}{p+1}\|\nabla u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ が大きければ消散構造を持つ方程式においても解の有限時間爆発が従う ([10], [5]).

定理 7. 非線形項が (4) で与えられている初期値問題 (1) の解 u は,
(i) $E[u](0) < 0$ ならば, ある有限時刻 $T_* < \infty$ が存在して,

$$\limsup_{t \uparrow T_*}\left\{\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u(\tau)\|_{L_x^2}^2\, d\tau\right\} = \infty$$

が成り立つ. また,
(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|u_1\|_{L^2}^2 + \dfrac{1}{2}\|\Delta u_0\|_{L^2}^2 + \dfrac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 - \dfrac{1}{p+1}\|\nabla u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1} < 0$ ならば, ある有限時刻 $T_* < \infty$ が存在して,

$$\limsup_{t \uparrow T_*}\|u(t)\|_{L^2}^2 = \infty$$

が成り立つ.

注意 8. 定理 7 は, 定理 5 において初期値の大きさに制限が入ることは本質的であることが示唆している.

References

[1] N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin, *Damped wave equation with super critical nonlinearities*, Differential Integral Equations **17** (2004), 637-652.

[2] N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin, *On the critical nonlinear damped wave equation with large initial data*, J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), 1400-1425.

[3] T. Hosono, T. Ogawa, *Large time behavior and L^p-L^q estimate of 2-dimensional nonlinear damped wave equations*, J. Differential Equations, **203** (2004), 82-118.

[4] R. Ikehata, *Asymptotic profiles for wave equations with strong damping*, J. Differential Equations **257** (2014), 2159-2177.

[5] R. Ikehata, M. Ohta, *Critical exponents for semilinear dissipative wave equations in $\mathbf{R}^N$*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 87-97.

[6] R. Ikehata, G. Todorova and B. Yordanov, *Wave equations with strong damping in Hilbert spaces*, J. Differential Equations **254** (2013), 3352-3368.

[7] G. Karch, *Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations*, Studia Math. **143** (2000), 175-197.

[8] M. Kato, Y-Z. Wang and S. Kawashima, *Asymptotic behavior of solutions to the generalized cubic double dispersion equation in one space dimension*, Kinet. Relat. Models **6** (2013), 969-987.

[9] T. Kawakami, Y. Ueda, *Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equations*, Differential Integral Equations, **26** (2013), 781-814.

[10] H.A. Levine, *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 1-21.

[11] P. Marcati, K. Nishihara, *The L^p-L^q estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to compressible flow through porous media*, J. Differential Equations, **191** (2003), 445-469.

[12] T. Narazaki, *L^p-L^q estimates for damped wave equations and their applications to semi-linear problem*, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 585-626.

[13] K. Nishihara, *L^p-L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z. **244** (2003), 631-649.

[14] H. Takeda, *Unconditional global well-posedness for nonlinear damped beam equations with small data*, preprint.

[15] Y. Ueda, S. Kawashima, *Large time behavior of solutions to a semilinear hyperbolic system with relaxation*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **4** (2007), 147-179.