対称放物型連立系に現れる縮退境界層解について*

中村 徹 (熊本大学・大学院自然科学研究科)†

本講演では次の放物型連立系に対する 1 次元半空間 $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$ 上の初期値・境界値問題を考える.

$$
\begin{cases}
u_t + f(u)_x = (Bu_x)_x & (x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0) \quad (1)\\
u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}_+) \quad (2)\\
u(t,0) = u_{\mathrm{b}} & (t > 0) \quad (3)
\end{cases}
$$

ここで m は自然数, $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^m$ は未知関数, $f(u) \in \mathbb{R}^m$ は流束関数, B は粘性行列で正定値対称な m 次定数行列とする. また $u_0(x) \in \mathbb{R}^m$ は $u_0(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ を満たす初期値, $u_{\mathrm{b}} \in \mathbb{R}^m$ はディリクレ境界値とする.

流束関数 $f(u)$ としては次の形の関数を考える.

$$
f(u) = Au + \frac{1}{2}F(u,u) \tag{4}
$$

ただし $A = (a_1,\ldots,a_m) = (a_{ij})_{ij}$ $(a_j \in \mathbb{R}^m,\ a_{ij} \in \mathbb{R})$ は m 次定数行列, $F(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^m$ 上の双線形写像であり, $u = {}^t(u_1,\ldots,u_m), v = {}^t(v_1,\ldots,v_m) \in \mathbb{R}^m$ に対し

$$
F(u,v) = \sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}u_jv_i = \begin{pmatrix} \langle F_1u,v\rangle \\ \vdots \\ \langle F_mu,v\rangle \end{pmatrix},
$$

$$
f_{ij} = \begin{pmatrix} f_{ij}^1 \\ \vdots \\ f_{ij}^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m\ (i,j = 1,\ldots,m), \quad F_k = (f_{ij}^k)_{ij} \text{ は } m \text{ 次行列 } (k = 1,\ldots,m)
$$

で与えられるものとする. すなわち $f(u)$ は, $u = 0$ の周りでテイラー展開した際の 3 次以降の項を無視した 2 次多項式と見なすことが出来る.

方程式 (1) が対称系となるために, 次の仮定をおく.

仮定 [A1]. (i) 行列 A は対称行列.
(ii) $F(\cdot,\cdot)$ は次の意味で対称 : $f_{ij}^k = f_{ji}^k = f_{kj}^i$.

本講演の目的は問題 (1)–(3) に現れる縮退境界層解の存在性及びその周りの摂動に対する一様な重み付きアプリオリ評価を導出することにある. ここで境界層解 $\tilde{u} = \tilde{u}(x)$ と

---

* 熊本大学応用解析セミナー (2014 年 10 月 4 日) 講演要旨.

† 連絡先 : 〒860-8555 熊本市中央区黒髪 2-39-1, E-mail: tohru@kumamoto-u.ac.jp

は境界条件 (3) と $\tilde{u}(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ を満たす滑らかな定常解である. 行列 A の固有値が負になるとき, 重み付きエネルギー法により定常解への時間漸近率を求められることが知られている. また行列 A が 0 固有値を持つ場合は, 定常問題に現れる平衡点におけるヤコビ行列も 0 固有値を持ち中心多様体が現れるため, 定常解は縮退する. 本講演では縮退境界層解の解析が主たる目的であるため, A に対して次の仮定をおく.

仮定 [A2]. 行列 A は半負定値で 0 固有値を 1 つ持つ.

方程式系 (1) の $m = 1$ の場合に相当する単独の粘性保存則に現れる縮退境界層解については論文 [1, 6] などで考察されている. 論文 [6] では空間 L^2_α における一様なアプリオリ評価と減衰評価が $\alpha < 2(1+\sqrt{2}) = 4.8\cdots$ の場合に求められており, その一方で $\alpha > 6$ の時は境界層解周りの線形化作用素の消散性が失われることも示されている. また論文 [1] では [6] の結果が改良され, $\alpha < 5$ の時の減衰評価と $\alpha > 5$ の時の消散性の消失が示された. これにより $\alpha = 5$ が縮退境界層解の安定性を示す臨界指数であることが解明された. 方程式が連立系となる圧縮性粘性流体のモデル方程式に対しては [2, 4, 5] などで研究されており, $\alpha < 2(1+\sqrt{2})$ の時の縮退境界層解の漸近安定性及び減衰評価が示されている.

以上の関連する研究結果を踏まえ, 本講演では対称な連立放物系に対して縮退境界層解の存在性及び $\alpha < 2(1+\sqrt{2})$ の場合での一様なアプリオリ評価に関する結果を紹介する.

参考文献

[1] S. Kawashima and K. Kurata, *Hardy type inequality and application to the stability of degenerate stationary waves*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 1, 1–19.

[2] S. Kawashima, T. Nakamura, S. Nishibata, and P. Zhu, *Stationary waves to viscous heat-conductive gases in half-space: existence, stability and convergence rate*, Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (2010), no. 12, 2201–2235.

[3] T. Nakamura, *Degenerate boundary layers for a system of viscous conservation laws*, to appear in Analysis and Applications.

[4] T. Nakamura, S. Nishibata, and T. Yuge, *Convergence rate of solutions toward stationary solutions to the compressible Navier-Stokes equation in a half line*, J. Differential Equations **241** (2007), no. 1, 94–111.

[5] T. Nakamura, Y. Ueda, and S. Kawashima, *Convergence rate toward degenerate stationary wave for compressible viscous gases*, Nonlinear analysis and convex analysis (2010), 239–248.

[6] Y. Ueda, T. Nakamura, and S. Kawashima, *Stability of degenerate stationary waves for viscous gases*, Arch. Ration. Mech. Anal. **198** (2010), no. 3, 735–762.

[7] N. Usami, S. Nishibata, and T. Nakamura, *Convergence rate of solutions towards the stationary solutions to symmetric hyperbolic-parabolic systems in half space*, preprint.