Long time existence of classical solutions to the 3D rotating Euler equations

高田　了（東北大学 大学院理学研究科 数学専攻）

3 次元全空間 $\mathbb{R}^3$ において，回転流体の運動を記述する次の Coriolis 力付き非圧縮性 Euler 方程式の初期値問題を考察する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Omega e_3 \times u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 & t > 0,\, x \in \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0 & t > 0,\, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = \phi(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{E_Ω}$$

ここで，$u = u(t, x) = (u^1(t, x), u^2(t, x), u^3(t, x))$ および $p = p(t, x)$ はそれぞれ流体の速度場と圧力を表す未知関数であり，$\phi = \phi(x) = (\phi^1(x), \phi^2(x), \phi^3(x))$ は与えられた初期速度場で $\operatorname{div} \phi = 0$ を満たすものとする．また，$\Omega \in \mathbb{R}$ は鉛直軸 $e_3 = (0, 0, 1)$ の周りでの回転の角周波数に対応した定数である．$\Omega = 0$ の場合が通常の非圧縮性 Euler 方程式となる．

本講演では，Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 枠組みにおける，初期値問題 (E_Ω) の長時間可解性を考察する．ここで長時間可解性とは，任意の初期速度場 $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ と任意の有限な時刻 $T > 0$ に対し，ある正定数 $\Omega_{\phi,T}$ が存在して，$|\Omega| \geqslant \Omega_{\phi,T}$ ならば初期値問題 (E_Ω) が時間区間 $[0, T]$ における一意古典解 u をもつことを意味する．本講演では特に，初期値 $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ に対する正則性条件 $s \in \mathbb{R}$ の緩和を目標とする．

固定座標系 $(\Omega = 0)$ の場合，初期値問題 (E_0) に関しては，時間局所解の一意存在が知られている [2,4]．より正確には，$s > 5/2$ のとき，任意の初期速度場 $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ に対してある時刻 $T_0 = T_0(s, \|\phi\|_{H^s}) > 0$ が存在し，(E_0) は時間局所一意古典解 $u \in C([0, T_0]; H^s(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T_0]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$ をもつ．

回転座標系 $(\Omega \in \mathbb{R})$ の場合も，Coriolis 力 $\Omega e_3 \times u$ はその歪対称性からエネルギーに影響を与えないため，初期値問題 (E_Ω) に対して，固定座標系 $(\Omega = 0)$ の場合と全く同様の時間局所解の一意存在定理が成立する．更に回転座標系の場合は，初期速度場および任意に与えられた有限な時刻 T に対して回転速度を十分大きくとることで，

$$\int_0^T \|\operatorname{curl} u(t)\|_{L^\infty} \, dt < \infty \tag{1}$$

が示され，Beale-Kato-Majda による爆発判定法より，時間局所解は与えられた時刻 T まで延長可能となる．

上記の有界性 (1) を示す際の鍵となるのが，Coriolis 力 $\Omega e_3 \times u$ から生成される時間発展作用素 $e^{\pm i\Omega t \frac{D_3}{|D|}}$ に対する時空可積分評価である．しかし，時間発展作用素 $e^{\pm i\Omega t \frac{D_3}{|D|}}$ は十分な平滑化効果を持たないことから，非線形項 $(u \cdot \nabla)u$ より 1 階の微分の損失が生じる．このため，(E_Ω) の長時間可解性に関する先行研究 [1] では，初期速度場 $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ の Sobolev 正則性として，$s > 7/2$ が仮定されている．

本研究では $s > 5/2$ として，初期速度場 $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ に対する初期値問題 (E_Ω) の長時間可解性を証明する．

定理 1. $s > 5/2$ とする．このとき，任意の初期速度場 $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ と任意の時刻 $0 < T < \infty$ に対してある正定数 $\Omega_{\phi,T}$ が存在し，$|\Omega| \geqslant \Omega_{\phi,T}$ ならば，初期値問題 (E_Ω) は一意古典解 $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$ をもつ．

証明においては，Kato-Lai [3] による軟化作用素を用いた正則化の方法を用いる．$s > 5/2$ とし，初期速度場 $\phi \in H^s(\mathbb{R}^3)$ および時刻 $0 < T < \infty$ を任意に与える．また，$0 < \varepsilon \leqslant 1$ に対して，$\phi_\varepsilon := e^{\varepsilon^2\Delta}\phi$ として初期速度場を正則化する．このとき，$\phi_\varepsilon \in H^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ より，ある正定数 $\Omega_{\phi_\varepsilon,T}$ が存在して，$|\Omega| \geqslant \Omega_{\phi_\varepsilon,T}$ ならば，初期値問題 (E_Ω) は，初期条件 $u_\varepsilon(0,x) = \phi_\varepsilon(x)$ を満たす時間区間 $[0,T]$ 上の解 u_ε をもつ．一方，エネルギー法と Coriolis 力の歪対称性より，初期値問題 (E_Ω) は全ての $\Omega \in \mathbb{R}$ に対して，初期条件 $u(0,x) = \phi(x)$ を満たすある時間区間 $[0,T_0]$ 上の局所解 u をもつ．そこで，$v_\varepsilon = u_\varepsilon - u$ とおくと，v_ε は次の摂動された方程式を時間区間 $[0,T_0]$ 上で満たす．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + \Omega e_3 \times v_\varepsilon + (v_\varepsilon \cdot \nabla)u_\varepsilon + (u \cdot \nabla)v_\varepsilon + \nabla(p_\varepsilon - p) = 0, \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \\ v_\varepsilon(0,x) = \phi_\varepsilon(x) - \phi(x). \end{cases} \tag{2}$$

対流項 $(u \cdot \nabla)v_\varepsilon$ に対しては，非圧縮性条件を用いた部分積分法により，

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla)(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} v_\varepsilon \cdot (1-\Delta)^{\frac{s}{2}} v_\varepsilon dx = 0 \tag{3}$$

が導かれ，v_ε に対する $s+1$ 階微分を相殺することが出来る．しかし，もう片方の対流項 $(v_\varepsilon \cdot \nabla)u_\varepsilon$ は上記 (3) の構造を持たないため，$H^s(\mathbb{R}^3)$ における積の評価を用いると，

$$\begin{aligned} \|(v_\varepsilon \cdot \nabla)u_\varepsilon\|_{H^s} &\lesssim \|v_\varepsilon\|_{L^\infty}\|\nabla u_\varepsilon\|_{H^s} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty}\|v_\varepsilon\|_{H^s} \\ &\lesssim \|v_\varepsilon\|_{H^{s-1}}\|u_\varepsilon\|_{H^{s+1}} + \|u_\varepsilon\|_{H^s}\|v_\varepsilon\|_{H^s} \end{aligned}$$

となり，u_ε に対する $s+1$ 階ノルムが現れる．この 1 階微分を軟化作用素に吸収させた際に現れるパラメータ ε^{-1} を $\|v_\varepsilon\|_{H^{s-1}}$ の係数とみなし，$\varepsilon^{-1}\|v_\varepsilon\|_{H^{s-1}}$ に対する一様評価を導出する．更に，$0 < \varepsilon \leqslant 1$ を十分小さく取ることで，方程式 (2) の解 v_ε の H^s-ノルムが任意に小さく取れることを示し，正則化された解 u_ε に対するアプリオリ評価を用いることで，時間局所解 u を任意の時間区間 $[0,T]$ へ延長する．

参考文献

[1] A. Dutrifoy, *Examples of dispersive effects in non-viscous rotating fluids*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), 331–356.

[2] T. Kato, *Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in* $\mathbf{R}^3$, J. Funct. Anal. **9** (1972), 296–305.

[3] T. Kato and C. Y. Lai, *Nonlinear evolution equations and the Euler flow*, J. Funct. Anal. **56** (1984), 15–28.

[4] T. Kato and G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 891–907.