Unconditional uniqueness for periodic nonlinear dispersive equations

岸本 展 (京都大学数理解析研究所)

非線形分散型方程式の初期値問題を論じる際，特に周期境界条件下における（トーラス $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ 上の）初期値問題の場合は，対応する積分方程式を時間変数に関して部分積分する手法（ここではNormal form reductionと呼ぶことにする：以下NFR）がしばしば用いられている．NFRにより，方程式の主要部（線形部分）の時間振動と非線形項の振動のズレ（非共鳴性）から生じる平滑化作用を効果的に取り込むことができるので，特に初期値の正則性が低い場合や方程式に微分の損失がある場合に有効となる．この点では，BourgainによるFourier制限ノルム法とも深く関連している．本講演では，NFRを用いて初期値問題の解のSobolev空間 $H^s(\mathbb{T}^d)$ における無条件一意性を考察する．

無条件一意性とは，H^s の初期値に対して $C_t(H^s)$ に属し超関数の意味で方程式をみたす解の $C_t(H^s)$ 全体での一意性を意味する．例えば，非線形項が未知関数の（微分を含まない）多項式で表される場合，$s > \frac{d}{2}$ であれば，Sobolevノルムの積評価により H^s での無条件一意性は直ちに従う．一方，より正則性が低い $(s < \frac{d}{2})$ 場合には，解を構成する際に通常は補助ノルム（Strichartzノルム，Fourier制限ノルム等）を用いるため，これらの空間に属さない解も込めた一意性を示すには別の議論が必要である．

NFRを用いた無条件一意性の研究は，KdV方程式(Babin-Ilyin-Titi[1])に始まり，修正KdV方程式(Kwon-Oh[12])や，非線形Schrödinger方程式（以下NLS）で空間1次元かつ3次の非線形項 $|u|^2u$ の場合(Guo-Kwon-Oh[4])などで結果が得られている．ここで，KdVや修正KdV方程式はNLSに比べて‘良い’共鳴構造を持っていることに注意する．具体的には，前者ではNFRによって可微分性を回復できるため，非線形項に微分が含まれているにもかかわらず有限回のNFRの適用で最良の結果が得られた．これに対し，後者ではNFRによる可微分性の回復は期待できず（但し可積分性はよくなる），NFRを無限回適用する必要があった．

NFRでは時間に関する部分積分による平滑化効果と引き換えに，未知関数の時間微分を考えることになり，方程式の代入によって次数のより高い非線形項を扱う必要性が生じる．特に，NLSのようにNFRを無限回適用しなければならない場合には，NFRによって次数が上がっていく非線形項のすべてを評価しなければならない困難さがある．例えば，3次のNLSの場合ではNFRの適用により5次の非線形項が現れ，その項にNFRを適用することで新たに7次の非線形項が現れ，以下非線形項の次数が2つずつ上がり，これら全てに対する評価式が必要となる．しかし，非線形項の次数の増加に

本研究は科研費（課題番号：24740086）の助成を受けたものである．

伴って共鳴構造も複雑化するため，毎回のNFRの適用に対して一定の平滑化効果が得られることを示すのは容易ではなく，特に $2J+1$ 次の非線形項に対して必要な評価式を，単純に3次の項に対して必要な評価式の J 回の繰り返しによって得るのは難しい．

NLSに対するGuoらの先行研究[4]では，（複雑な議論が必要ではあるが）各 $2J+1$ 次の評価式を直接示すことに成功している．彼らが扱った1次元3次のケースは，無条件一意性を期待できるSobolev指数が $s \geq \frac{1}{6}$ であるのに対し（これは3次の非線形項が L^1 に属し超関数の枠組みで意味を持つための要請である），方程式のスケール不変性から定まる臨界指数は $s=-\frac{1}{2}$ であり，スケールの意味で'余裕がある'ことが大きかったと思われる．

本講演では，各 $2J+1$ 次非線形評価式を，基本となるある3次非線形評価式の J 回繰り返しに帰着させるような方針を考えたい．当然，上述のような次数が上がる際の共鳴構造の複雑化のため，基本となる3次評価式としては，実際に3次の非線形項のコントロールに必要な評価式よりも強いものが必要となる．

どのような基本の非線形評価式に帰着させればよいかは，方程式の性質に大きく依存しており，個々の方程式に応じた工夫が求められる部分であるが，今回はそれについてのなるべく一般的な枠組みを与え，その応用として以下の一般次元・一般の奇数次のNLS，微分を含む3次のNLS，修正Benjamin-Ono方程式について無条件一意性を示す：

$$i\partial_t u + \Delta u = \pm |u|^{2k}u, \qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{T}^d, \qquad k,d\in\mathbb{N} \tag{NLS$_k$}$$

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = \pm i\partial_x(|u|^2 u), \qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{T} \tag{DNLS}$$

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = \pm\partial_x(u^3), \qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{T} \tag{MBO}$$

但し(MBO)は実数値で考え，$\mathcal{H}=-i\mathcal{F}^{-1}\mathrm{sgn}(\cdot)\mathcal{F}$ はトーラス上のHilbert変換を表す．

これらの方程式に関する先行結果をいくつか紹介する．(NLS$_k$)の適切性については $x\in\mathbb{R}^d$ の場合と同様によく研究されており，一部の例外を除いて，スケール劣臨界または臨界なSobolev空間での時間局所適切性が得られている（例えばBourgain[2], Herr-Tataru-Tzvetkov[9], Wang[17]）．H^s での無条件一意性は，$x\in\mathbb{R}^d$ の場合はKato[10], Furioli-Terraneo[3], Su Win-Tsutsumi[14]等多くの結果がある一方で，トーラスでは $d=k=1$ の場合([4])のみで，$d\geq 2$ または $k\geq 2$ では自明なケース $s>\frac{d}{2}$ を除き知られていなかった．

(DNLS)については，まず局所適切性が $x\in\mathbb{R},\mathbb{T}$ いずれの場合も H^s, $s\geq\frac{1}{2}$ で示されている(Takaoka[15], Herr[8])．いずれも証明にはHayashi[6], Hayashi-Ozawa[7]に始まるgauge変換の手法とFourier制限ノルム法を用いており，現在のところ最良である（スケール臨界指数は $s=0$）．一方 H^s での無条件一意性については，$x\in\mathbb{R}$ の場合 $s\geq 1$ に対してSu Win[13]が示しているが，同様の議論は $\mathbb{T}$ の場合にも適用できる．

(MBO) は (DNLS) と類似の性質を持ち，やはり gauge 変換 (Tao[16]) を活用して H^s, $s \geq \frac{1}{2}$ での時間局所適切性が得られている ($\mathbb{R}$ 上の場合は Kenig-Takaoka[11], $\mathbb{T}$ 上については Guo-Lin-Molinet[5]) が，無条件一意性については先行結果がない．

本講演での主結果は以下の通りである．

定理 1. 次の場合に，H^s における初期値問題の解の無条件一意性が成り立つ：

- (NLS$_k$), "$k \geq 2$, $d \geq 1$ または $k = 1$, $d \geq 6$" で "$s > s_c$ かつ $s \geq s_e$".
- (NLS$_1$), $2 \leq d \leq 5$ で $s > \frac{d^2}{2(d+3)}$.
- (DNLS), (MBO) で $s > \frac{1}{2}$.

但し，$s_c := \frac{d}{2} - \frac{1}{k}$, $s_e := \frac{d(2k-1)}{2(2k+1)}$.

(NLS$_k$) について，s_c はスケール臨界指数であり，一方 s_e は埋め込み $\dot{H}^{s_e} \hookrightarrow L^{2k+1}$ に対応する指数で，方程式を超関数の枠組みで考えるために $s \geq s_e$ が必要である．従って，$k \geq 2$ または $d \geq 6$ の場合は上記の結果はほぼ最良といえる．$k = 1$ で低次元の場合については，$\max\{s_c, s_e\} < \frac{d^2}{2(d+3)} < \frac{d}{2}$ であり，改良の余地があると思われる．

(DNLS) および (MBO) では gauge 変換した方程式に対して NFR を無限回適用する議論により無条件一意性を示す．元の方程式は $H^{1/6} \hookrightarrow L^3$ で意味を持つが，gauge 変換した方程式を超関数の枠組みで扱うために $s > \frac{1}{2}$ が必要であり，この手法を用いる限り上記の結果は最良である．Gauge 変換は証明において方程式の共鳴構造を大幅に改善する本質的な役割を果たしているため，上記の結果を $s = \frac{1}{2}$ あるいはより正則性の低い場合に拡張するのは難しいと思われる．

参考文献

[1] A.V. Babin, A.A. Ilyin, E.S. Titi; Comm. Pure Appl. Math. **64** (2011), no. 5, 591–648.

[2] J. Bourgain; Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 2, 107–156.

[3] G. Furioli, E. Terraneo; Commun. Contemp. Math. **5** (2003), no. 3, 349–367.

[4] Z. Guo, S. Kwon, T. Oh; Comm. Math. Phys. **322** (2013), no. 1, 19–48.

[5] Z. Guo, Y. Lin, L. Molinet; preprint (2013). `arXiv:1302.5456`

[6] N. Hayashi; Nonlinear Anal. **20** (1993), no. 7, 823–833.

[7] N. Hayashi, T. Ozawa; Phys. D **55** (1992), no. 1-2, 14–36.

[8] S. Herr; Int. Math. Res. Not. **2006**, Art. ID 96763, 33pp.

[9] S. Herr, D. Tataru, N. Tzvetkov; Duke Math. J. **159** (2011), 329–349.

[10] T. Kato; J. Anal. Math. **67** (1995), 281–306.

[11] C.E. Kenig, H. Takaoka; Int. Math. Res. Not. **2006**, Art. ID 95702, 44pp.

[12] S. Kwon, T. Oh; Int. Math. Res. Not. **2012**, no. 15, 3509–3534.

[13] Y.Y. Su Win; J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), no. 3, 683–697.

[14] Y.Y. Su Win, Y. Tsutsumi; Hokkaido Math. J. **37** (2008), no. 4, 839–859.

[15] H. Takaoka; Adv. Differential Equations **4** (1999), no. 4, 561–580.

[16] T. Tao; J. Hyperbolic Differ. Equ. **1** (2004), no. 1, 27–49.

[17] Y. Wang; SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 3, 1691–1703.