Time-periodic problem for the compressible Navier-Stokes equation on the whole space

津田　和幸　(九州大学大学院数理学府)

全空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ における圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \\ \rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla) v) - \mu \triangle v - (\mu + \mu')\nabla(\nabla \cdot v) + \nabla P(\rho) = \rho g \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで $\rho = \rho(x,t)$ と $v = (v_1(x,t), \cdots, v_n(x,t))$ $(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$ はそれぞれ流体の密度と速度場を表し, ともに未知量である．$P = P(\rho)$ は圧力項であり, ρ の滑らかな関数で, 与えられた正定数 ρ_* に対して $P'(\rho_*) > 0$ を仮定する．μ と μ' は粘性係数を表し, ともに定数で $\mu > 0$ かつ $\mu' + \frac{2}{n}\mu \geq 0$ をみたすとする．$g = g(x,t)$ は与えられた周期外力を表し, 正定数 T に対して $g(x, t+T) = g(x,t)$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R})$ をみたすとする．

ここでは (1) の時間周期解の存在とその安定性について考える．

Ma-Ukai-Yang (2010) [1] により, $n \geq 5$ のとき, 十分小さな周期外力 g に対して (1) の $(\rho_*, 0)$ のまわりでの時間周期解 (ρ_{per}, v_{per}) の存在が示された．さらに十分小さな周期外力の下, その周期解は十分小さな攪乱に対して安定でその摂動 $(\rho - \rho_{per}, v - v_{per})$ は

$$\|(\rho - \rho_{per}, v - v_{per})\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}} \text{ as } t \to \infty.$$

をみたすことが示された.

Kagei-Tsuda (2013) [2] により, $n \geq 3$ の場合に, 外力 g が式

$$g(-x, t) = -g(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

をみたし, g が重み付き Sobolev 空間で十分小さいとき, (1) の $(\rho_*, 0)$ のまわりでの時間周期解 (ρ_{per}, v_{per}) が存在が示された．さらにその周期解は十分小さな攪乱に対して安定でその摂動 $(\rho - \rho_{per}, v - v_{per})$ は

$$\|(\rho - \rho_{per}, v - v_{per})\|_{L^2} = O(t^{-\frac{n}{4}}) \text{ as } t \to \infty.$$

をみたすことが示された.

本研究では $n \geq 3$ に対して, 外力 g に式 (2) を課さずに, (1) の時間周期問題を考察する．非負整数 ℓ と $1 \leq p \leq \infty$ に対して重み付き L^p 空間を以下で定義する:

$$L^p_\ell = \left\{ u \in L^p : \|u\|_{L^p_\ell} := \|(1+|x|)^\ell u\|_{L^p} < +\infty \right\},$$

さらに, 非負整数 k, ℓ に対して, 重み付き Sobolev 空間を以下で定義する:

$$H^k_\ell = \left\{ u \in H^k ; \|u\|_{H^k_\ell} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha u\|^2_{L^2_\ell} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

このとき, (1) について外力に式 (2) を課さない場合に, 次の結果を得ることができた:

Theorem 1. $n \geq 3$, s を $s \geq \left[\frac{n}{2}\right]+1$ をみたす整数とする. $g(x,t) \in C_{per}([0,T]; L^1 \cap L^2_1 \cap L^\infty_n) \cap L^2_{per}(0,T; H^{s-1}_{n-1})$ とする.

$$|||g|||_s := \|g\|_{C_{per}([0,T];L^1\cap L^2_1\cap L^\infty_n)} + \|g\|_{L^2_{per}(0,T;H^{s-1}_{n-1})}.$$

と定める. このとき, ある定数 $\delta_1 > 0$ が存在して, $|||g|||_s \leq \delta_1$ ならば, (1) は時間周期解 $(\rho_{per}, v_{per}) \in C_{per}([0,T]; H^s)$ をもち, 解の評価として

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\||x|^{n-1}\rho_{per}(t)\|_{L^\infty} + \||x|^{n-2}v_{per}(t)\|_{L^\infty} + \||x|^{n-1}\nabla v_{per}(t)\|_{L^\infty} \right) \leq C|||g|||_s$$

をみたす.

さらに得られた時間周期解の安定性について次の結果を得た.

Theorem 2. $n \geq 3$, s を $s \geq \left[\frac{n}{2}\right]+1$ をみたす整数とする. $g(x,t) \in C_{per}([0,T]; L^1 \cap L^2_1 \cap L^\infty_n) \cap L^2_{per}(0,T; H^s_{n-1})$ とする. このとき, ある定数 $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ が存在して,

$$|||g|||_{s+1} < \epsilon_1, \quad \|(\rho(0) - \rho_{per}(0), v(0) - v_{per}(0))\|_{H^s} < \epsilon_2,$$

ならば, $u(t) := (\rho(t) - \rho_{per}(t), v(t) - v_{per}(t))$ が時間大域的に存在し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&u(t) \in C([0,\infty); H^s), \\
&\|u(t)\|^2_{H^s} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{H^{s-1}\times H^s} ds \leq C\|u(0)\|^2_{H^s} \text{ for } k = 0,1, \\
&\|u(t)\|_{L^\infty} \to 0 \quad (t \to \infty).
\end{aligned}$$

References

[1] H. Ma, S. Ukai, and T. Yang, Time periodic solutions of compressible Navier-Stokes equations, J. Differential Equations, 248 (2010), pp. 2275–2293.

[2] Y. Kagei, K. Tsuda, Existence and stability of time periodic solution to the compressible Navier-Stokes equation for time periodic external force with symmetry, preprint, 2014, MI Preprint series MI 2014-5, Kyushu University.