修正型 Strichartz 評価と非線形 Schrödinger 方程式

島根大学大学院総合理工学研究科　和田 健志

§1. 序

Strichartz 評価は波動方程式や分散型方程式の解を時空間で評価するタイプの不等式で，非線形波動方程式や分散型方程式の初期値問題問題の適切性を示す上で基本的な評価式である．本講演では， Schrödinger 方程式の Strichartz 評価を，時間に関する微分を含む形に拡張し，非線形 Schrödinger 方程式の解法に応用することを試みたい．

$n \geq 1$ とし，時空間 $\boldsymbol{R}^{1+n} = \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}_x^n$ において以下の Schrödinger 方程式を考える：

$$\partial_t u + i\Delta u = f, \tag{1}$$

$$u(0, \cdot) = u_0. \tag{2}$$

発展作用素 $U(t) = \exp(-it\Delta)$ を用いることにより，(1)-(2) はつぎの積分方程式に書き替えられる：

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-t')f(t')dt'. \tag{3}$$

定義. $n \geq 1$ とし, $1 \leq r \leq \infty$ に対して $\delta(r) = n/2 - n/r$ とする．$0 \leq 2/q = \delta(r) \leq 1$ (但し，$(n, q, r) \neq (2, 2, \infty)$ とする) のとき，(q, r) は許容対 (admissible pair) であるという．

定理 A (Strichartz [7], Ginibre-Velo [3], Yajima [11], Kato [4], Keel-Tao [5])**.** (q, r), (γ, ρ) を許容対とするとき，(3) の解は以下の評価をみたす：

$$\|u\|_{L^q(L^r)} \lesssim \|u_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^{\gamma'}(L^{\rho'})}. \tag{4}$$

上記の定理 A は，以下の非線形 Schrödinger 方程式の適切性を示す上で有効である：

$$\partial_t u + i\Delta u = f(u) \equiv \lambda |u|^{p-1} u, \tag{5}$$

$$u(0, \cdot) = u_0. \tag{6}$$

ここで，$p > 1$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$ である．実際，以下が成り立つ．

定理 B. $0 \leq s < n/2$ とする．p は $1 < p \leq 1 + 4/(n-2s)$ をみたすとし，さらに p が奇数でないならば以下のいずれかを仮定する：

(i) $s < p$;　(ii) $\max(s/2, s-2) < p < 1 + 4/(n-2s)$.

このとき，任意の $u_0 \in H^s$ に対して，$T > 0$ が存在し，(5)-(6) は $C([-T,T];H^s)$ において解をもつ[1]．さらに，$p \geq 1 + 4/n$ の場合，$\|u_0\|_{H^s}$ が十分小であれば解は大域的である．

この結果は，(i) の場合については Ginibre-Velo [2, 3], Tsutsumi [8], Kato [4], Cazenave-Weissler [1] 達により示された．(ii) の場合については，まず $s = 2$ の場合に Tsutsumi [9] によって証明され, Pecher [6] および Uchizono-Wada [10] により一般の s の場合に拡張された．通常，H^s において方程式を解く場合，方程式を x で s 回微分して評価するが，非線形項の滑らかさが低い場合それは不可能である．そのような場合，方程式を利用して x に関する 2 階微分を t に関する 1 階微分で置き換えることにより微分の回数を減らすことができる．但し，$1 < s < 4$, $s \neq 2$ の場合は t に関する分数階の微分を利用する必要があるので，t に関する Besov 空間での評価を用いる．それが後述の定理 C である．

定義 (Littlewood-Paley 分解)**.** $\hat{\psi} = \mathscr{F}\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ は非負偶関数であって，$|\tau| \leq 1$ ならば $\hat{\psi}(\tau) = 1$, $|\tau| \geq 2$ ならば $\hat{\psi}(\tau) = 0$ をみたすとする．$\hat{\varphi}(\tau) = \hat{\psi}(\tau) - \hat{\psi}(2\tau)$ とし，$j \in \boldsymbol{Z}$ に対し, φ_j を $\hat{\varphi}_j(\tau) = \hat{\varphi}(\tau/2^j)$ により定める．このとき, 任意の τ に対して

$$\hat{\psi}(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\varphi}_j(\tau) = 1$$

が成立する．$\xi \in \boldsymbol{R}^n$ に対しては $\hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}_j(|\xi|)$ とし，さらに $\varphi_{j/2}$ を $\hat{\varphi}_{j/2}(\xi) = \hat{\varphi}_j(|\xi|^2)$ により定める．

定義 (Besov 空間)**.** E を Banach 空間とする．$\theta \in \boldsymbol{R}$, $1 \leq q, \alpha \leq \infty$ に対して

$$B^\theta_{q,\alpha}(\boldsymbol{R}^n; E) = \{u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n); \|u\|_{B^\theta_{q,\alpha}(\boldsymbol{R}^n;E)} < \infty\},$$
$$\|u\|_{B^\theta_{q,\alpha}(\boldsymbol{R}^n;E)} \equiv \|\psi * u\|_{L^q(\boldsymbol{R}^n;E)} + \Big(\sum_{j=1}^{\infty}(2^{\theta j}\|\varphi_j * u\|_{L^q(\boldsymbol{R}^n;E)})^\alpha\Big)^{1/\alpha}$$

と定義する．なお，特に混乱が無い限り $B^\theta_{q,\alpha}(E) = B^\theta_{q,\alpha}(\boldsymbol{R};E)$, $B^\theta_{q,\alpha} = B^\theta_{q,\alpha}(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C})$ 等と略記する．容易に分かるように，以下の同値性が成り立つ：

$$\|u\|_{B^{2\theta}_{q,\alpha}} \simeq \|\psi * u\|_{L^q} + \Big(\sum_{j=1}^{\infty}(2^{\theta j}\|\varphi_{j/2} * u\|_{L^q})^\alpha\Big)^{1/\alpha}.$$

定理 C (Pecher [6], Uchizono-Wada [10])**.** (q, r) を許容対，$0 < \theta_- < \theta < \theta_+ < 1$ とするとき，(3) の解 u は以下の評価式をみたす：

$$\|u\|_{L^q(B^{2\theta}_{r,q}) \cap B^\theta_{q,2}(L^r)} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{B^\theta_{q',2}(L^{r'})} + \max_{\pm}\|f\|_{L^{\bar{q}(\theta_\pm)}(L^{\bar{r}(\theta_\pm)})}. \tag{7}$$

但し $1/\bar{q}(\theta) = (1-\theta)/q' + \theta/q$，$1/\bar{r}(\theta) = (1-\theta)/r' + \theta/r$.

[1] 一意性は，$C([-T,T];H^s)$ と Strichartz 型の適当な補助空間との共通部分において成立する．s と p の値によっては，補助空間が不要な場合もある．

不等式 (7) の主な欠点は右辺第 2 項にある．$\theta_- < \theta < \theta_+$ を仮定しているため方程式に付随したスケール不変性がなく，このため定理 B の (ii) では $p = 1 + 4/(n-2s)$ の場合を排除する必要があった．(7) をスケール不変な形に改善できれば，この場合も取り扱えることが期待できるので，そのような評価を得ることがほん講演の目的である．以下が主定理である．

定理 1 (Nakamura-Wada)**.** (q,r), (γ,ρ) を許容対，$0 < \theta < 1$ とする．$(\bar{q},\bar{r})$ は $1 < \bar{q},\bar{r} < \infty$ で $2/\bar{q} - \delta(\bar{r}) = 2(1-\theta)$ をみたすとする．このとき，(3) の解は以下の評価をみたす：

$$\|u\|_{B^{\theta}_{q,2}(L^r)} \lesssim \|u_0\|_{H^{2\theta}} + \|f\|_{B^{\theta}_{\gamma',2}(L^{\rho'})} + \|\{f\}\|_{l^2(L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}}))}. \tag{8}$$

さらに，$\bar{q} \le q$ ならば

$$\|u\|_{L^q(B^{2\theta}_{r,2})} \lesssim \|u_0\|_{H^{2\theta}} + \|f\|_{B^{\theta}_{\gamma',2}(L^{\rho'})} + \|\{f\}\|_{l^2(L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}}))} \tag{9}$$

も成立する．ここで，$\|\{f\}\|_{l^2(L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}}))} = \|\psi *_{(x)} f\|_{L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}})} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi_j *_{(x)} f\|^2_{L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}})}\right)^{1/2}$.

定理 2 (Nakamura-Wada)**.** $1 < s < \min(n/2, 4)$ かつ $\max(1, s/2) < p = 1 + 4/(n-2s)$ とする．このとき，$u_0 \in H^s$ かつ $\|u_0\|_{H^s}$ が十分小さければ，(5)-(6) は $C(\boldsymbol{R}; H^s)$ において唯一つの解をもつ．

References

[1] T. Cazenave, F. B. Weissler, Nonlinear Anal., **14** (1990), 807–836.

[2] J. Ginibre, G. Velo, J. Funct. Anal., **32** (1979), 1–32.

[3] J. Ginibre, G. Velo, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **2** (1985), 309–327.

[4] T. Kato, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor., **46** (1987), 113–129.

[5] M. Keel, T. Tao, Amer. J. Math., **120** (1998), 955–980.

[6] H. Pecher, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor., **67** (1997), 259–296.

[7] R. S. Strichartz, Duke Math. J. **44** (1977), 705–714.

[8] Y. Tsutsumi, Funkcial. Ekvac. 30 (1987), 115–125.

[9] Y. Tsutsumi, Nonlinear Anal., **11** (1987), 1143–1154.

[10] H. Uchizono, T. Wada, J. Math. Anal. Appl. **395** (2012), 56–62.

[11] K. Yajima, Comm. Math. Phys, Vol. 110, (1987), 415–426.