質量劣臨界非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動

眞崎 聡 (広島大学 工学研究院)

1. 序

本講演では, 次の非線形シュレディンガー方程式を考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^{p-1}u, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{F}\dot{H}^{s_c}, \end{cases} \tag{1}$$

$$N \geqslant 1, \qquad \max\left(1+\frac{4}{N+2}, 1+\frac{2}{N}\right) < p < 1+\frac{4}{N}. \tag{2}$$

ここで, $s_c = \frac{2}{p-1} - \frac{N}{2} \in (0, \min(1, \frac{N}{2}))$ であり, 初期値の空間はスケール臨界である斉次重みつき空間 $\mathcal{F}\dot{H}^s = \{f \in \mathcal{S}' \mid \mathcal{F}f \in \dot{H}^s\}$ とする. 我々の目的は方程式 (1) の解の大域挙動を調べることである. より詳しく述べると, 散乱のためのシャープな十分条件を導く. 散乱の定義は後ほど詳しく述べるが, 大まかに述べると, 非線形方程式の解 u が時刻無限大付近で自由 Schrödinger 方程式の解のように振舞うことである. 初期値の空間 $\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}$ についてはスケール不変な空間であること以外にも, L^2 の部分空間でないという点が重要である. それは, $u_0 \in L^2$ であれば (質量保存則から) 解は大域的であるのに対して, L^2 でないことを許すと有限爆発する解がありえるからである (Fibich による). なお, 今回の初期値の空間 $\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}$ から初期値をとったときに有限時間爆発する例があるのかはわかっていない.

近年, Kenig-Merle によるエネルギー臨界べき $p = 1 + \frac{4}{N-2}$ の場合の研究をはじめとして, 質量臨界および優臨界の場合に対して解の大域挙動を分類する研究が盛んに行われている. その結果, 基底状態解程度までの大きさ (各 p に対して大小の意味は異なる) をもつ解に対して挙動が理解されつつある状況である. 特に, 質量臨界 ($p = 1 + 4/N$) のときには, 基底状態解より小さい質量を持つ L^2 解は必ず時間大域的で散乱することが Dodson により示された (H^1 解に対しては以前から知られていた. Sobolev 埋め込みの最良定数の評価による). 本講演では, これまであまり理解の進んでいない質量劣臨界 $p < 1 + 4/N$ の部分を考察する. 質量臨界指数 $p = 1 + 4/N$ を境に (1) の性質は大きく変わることが知られており, 例えば, H^1 の枠組みでは, 基底状態解は軌道安定であることが知られている.

2. 主結果

まず時間局所適切性について述べる.

定理 1. *([2])* (2) のもと, (1) は $\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}$ で時間局所適切である, つまり $\forall u_0 \in \mathcal{F}\dot{H}^{s_c}$, $\exists I \subset \mathbb{R}$ *with* $0 \in I$, $\exists!\ u : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ *such that* $e^{-it\Delta}u(t) \in C(I, \mathcal{F}\dot{H}^{s_c})$. また, 初期値連続依存性が成り立つ.

[3] で, $\mathcal{F}\dot{H}^{s_c} \cap L^2$ における (時間大域) 適切性が得られており, 上の定理はこれから L^2 の仮定を除いたものである. スケール不変な空間で適切性が得られていることを指摘したい. 質量劣臨界の場合, (スケール不変) 斉次 Sobolev 空間 $\dot{H}^{-s_c}$ では (1) は非適切

であることが知られている．なお, スケール不変空間で解いたときの常であるが, 存在区間 I は初期値 u_0 のノルムの大きさだけでは保証されず, その形状にまで依存する．

主結果を述べる．以後, (1) の解 $u(t)$ が $t\to\infty$ で散乱する ($t\to-\infty$ で散乱する) ことを $\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}$ の意味で $\lim_{t\to\infty} e^{-it\Delta}u(t)$ ($\lim_{t\to-\infty} e^{-it\Delta}u(t)$) が存在することとし, 散乱初期値集合 $S_\pm$ を次のように定義する．

$$S_\pm := \left\{ u_0 \in \mathcal{F}\dot{H}^{s_c} \;\middle|\; u_0 \text{を初期値とする}\,(1)\,\text{の解}\,u(t)\,\text{が}\,t\to\pm\infty\,\text{で散乱.} \right\}.$$

定理 2. *([2])* (2) のもと, 以下の性質を満たす特殊な初期値 $u_{0,c}$ が存在する;

1. $u_{0,c} \in \mathcal{F}\dot{H}^{s_c} \setminus S_+$ (正の方向へ (広義の) 爆発).
2. $\|u_{0,c}\|_{\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}} = \inf\{\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}} \mid u_0 \in \mathcal{F}\dot{H}^{s_c} \setminus (S_+ \cap S_-)\}$ (最小性).

$u_{0,c}$ を初期値とする (1) の解 $u_c(t)$ がいわゆる**最小爆発解**である．この定理は質量臨界 $p = 1 + \frac{4}{N}$ のときも, $\mathcal{F}\dot{H}^0 = L^2$ という自明な置き換えのもと成立する (Dodson による). そのときには, 基底状態解 $e^{it}Q$ がそのような最小爆発解の例である．しかし, 質量劣臨界のときは大きく様相が異なる:

定理 3. *([2])* (2) を仮定．もし $v_0 \in \mathcal{F}\dot{H}^{s_c} \cap \dot{H}^1$ が

$$E(v_0) := \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v_0\|_{L^{p+1}}^{p+1} < 0$$

を満たすならば, $\|v_0\|_{\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}} > \inf\{\|u_0\|_{\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}} \mid u_0 \in \mathcal{F}\dot{H}^{s_c} \setminus S\}$ が成立．特に, 定理 *2* 与えられる最小爆発解 u_c は定在波解ではない．

定理 2 と 3 は初期値を $\mathcal{F}H^1$ からとり

$$\ell(u(0)) := \|u(0)\|_{L^2}^{1-s_c} \||x|u(0)\|_{L^2}^{s_c} = c \inf_{\text{scaling}} \|u(0)\|_{\mathcal{F}H^1}.$$

というスケール不変ノルムに関しての最小化と考えたときにも成立する ([1, 2])．ただし, この最小化の問題は $\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}$ における最小化とは厳密には別の問題であり, 同じ解が見つかっているのかは不明である．例えば, $\mathcal{F}H^1$ での最小元は有限時間爆発はしないことがアプリオリにわかる (L^2 に属すため) が, $\mathcal{F}\dot{H}^{s_c}$ における最小元は有限時間爆発しうる．

定理 2 と 3 の証明のためアイデアは, Kenig-Merle らが導入した compactness-rigidity argument を重み付き空間で行うことである．特に, [3] によって導入された Lorentz-修正 Besov 型の空間における安定性評価が新しい道具の一つ．これは同時に定理 1 において $u_0 \in L^2$ の仮定を除くための鍵でもある．

References

[1] S. Masaki, *On minimal non-scattering solution for mass-subcritical nonlinear Schrödinger equation*, `arXiv:1301:1741`.

[2] S. Masaki, *A sharp scattering condition for focusing mass-subcritical nonlinear Schrödinger equation*, `arXiv:1312:5806`.

[3] Nakanishi, K. and Ozawa, T., *Remarks on scattering for nonlinear Schrödinger equations*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **9** (2002), no. 1, 45–68.