

Escape rate of symmetric jump-diffusion processes

塩沢 裕一（岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部）

本講演では、内部消滅を持たない対称マルコフ過程の無限遠方への脱出レートの上限を、体積増大度と係数増大度で特徴づける。本予稿では飛躍型対称マルコフ過程の場合に結果を述べるが、飛躍拡散型対称マルコフ過程の場合も同様の結果が得られる。

(X, d) を局所コンパクト可分距離空間とし、 m を X 上の正值ラドン測度で X 全体に台を持つものとする。 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2(X; m)$ 上の正則ディリクレ形式とし、 $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in X})$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ から生成される m 対称マルコフ過程とする。 X 上の台がコンパクトな連続関数全体を $C_0(X)$ とかき、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Beurling-Deny 分解に非局所項のみが現れることを仮定する：

$$\mathcal{E}(u, v) = \iint_{X \times X \setminus \text{diag}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) J(dx dy) \quad u, v \in \mathcal{F} \cap C_0(X).$$

ただし、 diag は $X \times X$ 上の対角線集合であり、 $J(dx dy)$ は $X \times X \setminus \text{diag}$ 上の正值対称ラドン測度である。また、 $J(dx dy) = J(x, dy)m(dx)$ を満たす積分核 $J(x, dy)$ の存在を仮定する。

X 上の関数 ρ に対して $B_\rho(r) := \{x \in X \mid \rho(x) < r\}$ ($r > 0$) とおき、 \mathcal{A} を次で定める：

$$\mathcal{A} := \left\{ \rho \in C(X) \cap \mathcal{F}_{\text{loc}} \mid \lim_{x \rightarrow \Delta} \rho(x) = \infty, \text{ 各 } r > 0 \text{ について } B_\rho(r) \text{ は相対コンパクト} \right\}.$$

仮定 1. X 上の単調非減少な非負値関数列 $\{\rho_R\}_{R \geq 1} \subset \mathcal{A}$ と $X \times X \setminus \text{diag}$ 上の単調増加な非負値関数列 $\{F_R\}_{R \geq 1}$ が存在して、次の条件が成立する：

(i) 各 $R \geq 1$ に対して次が成立する：

$$\bullet M_1(R) := \sup_{x \in B_{\rho_R}(R)} \int_{0 < d(x, y) < F_R(x, y)} (\rho_R(x) - \rho_R(y))^2 J(x, dy) < \infty;$$

$$\bullet M_2(R) := \sup_{x \in X} \int_{d(x, y) \geq F_R(x, y)} J(x, dy) < \infty.$$

(ii) 各コンパクト集合 $K \subset X$ に対して、すべての十分大きな R について $K \subset B_{\rho_R}(R/4)$.

(iii) $\rho := \rho_1$ とおく。すべての十分大きな R に対して

$$0 < d(x, y) < F_R(x, y) \implies |\rho_R(x) - \rho_R(y)| < \frac{1}{32} \cdot \frac{R}{\log m(B_\rho(R)) + \log \log R}.$$

関数 F_R は“飛躍の大きさ”を定め、関数 ρ_R は“小さい飛躍”に適合した長さを表す。

$N_1(R)$ は $M_1(R) \leq N_1(R)$ を満たす単調非減少関数とし、 $N_2(R)$ は $M_2(R) \leq N_2(R)$ を満たす単調非増加関数とする。 $\mu \in [0, 2)$ を固定し、関数 $\psi_\mu(R)$ を次で定める：

$$\psi_\mu(R) := \frac{R^{2-\mu}}{N_1(R) \cdot (\log m(B_\rho(R)) + \log \log R)}.$$

仮定 2. (i) すべての十分大きな R について $\psi_\mu(R)$ は単調増加かつ $\lim_{R \rightarrow \infty} \psi_\mu(R) = \infty$.
(ii) 定数 $\nu > 1$ と $c > 0$ が存在して

$$\psi_\mu(R)N_2(R) \leq \frac{c}{(\log R)^\nu}.$$

仮定 2 (ii) は “大きい飛躍” の起こる頻度を制限する.

定理 1. 仮定 1, 2 の下, 定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(X_t)}{\psi_\mu^{-1}(ct)} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \quad m\text{-a.e. } x \in X.$$

定理 1 はリーマン多様体上のブラウン運動に関する Grigor'yan [G99] の結果を純飛躍型マルコフ過程へ拡張している. 一方, Grigor'yan [G99] の結果は, リーマン多様体上のブラウン運動および対称拡散過程の枠組みで, Grigor'yan-Hsu [GH09], Hsu-Qin [HQ10], Ouyang [O] により一般化および精密化されている. これらの結果は, Huang [H1], Huang-S. [HS14] によって, 局所有限な重み付きグラフ上のマルコフ連鎖にも拡張されている.

例 1. (X, d) を d 次元ユークリッド空間とし, $|\cdot|$ をユークリッドノルムとする. m を d 次元ルベグ測度とし, 積分核 $J(x, dy)$ について次を仮定する.

- $J(x, dy)$ は m に絶対連続であり, 定数 $\alpha \in (0, 2)$ が存在して密度関数 $J(x, y)$ は

$$J(x, y) \leq \frac{c(x, y)}{|x - y|^{d+\alpha}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \text{diag}$$

を満たす. ただし, $c(x, y)$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の正値可測関数であり, 定数 $\delta \in [0, 1)$ と $q \in [0, \alpha)$ が存在して次を満たすものとする:

$$c(x, y) \asymp \begin{cases} (1 + |x|)^2(\log(2 + |x|))^\delta + (1 + |y|)^2(\log(2 + |y|))^\delta, & |x - y| < 1, \\ (1 + |x|)^q + (1 + |y|)^q, & |x - y| \geq 1. \end{cases}$$

\mathbb{R}^d 上の台がコンパクトで滑らかな関数全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とかく. すると, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は可閉となり, その閉包 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式となる (例えば Fukushima-Oshima-Takeda (2011) の Example 1.2.4 を参照せよ). $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程を $M = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in \mathbb{R}^d})$ とかく.

- (a) $\alpha - q > 1 - \delta$ ならば, 定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{1-\delta}}}} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

- (b) $0 < \alpha - q \leq 1 - \delta$ ならば, $0 < \varepsilon < \alpha - q + \delta$ を満たす任意の正数 ε に対して定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{\alpha-q-\varepsilon}}}} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

$\delta = 1$ かつ $q \in [0, \alpha)$ のとき, 対称マルコフ過程 M は保存的である ([S]). しかし, 脱出レートの上限は分からない.

参考文献

• 対称拡散過程の脱出レートに関する論文

- [G99] A. Grigor'yan, Escape rate of Brownian motion on Riemannian manifolds, *Appl. Anal.* **71** (1999), 63–89.
- [GH09] A. Grigor'yan and E. Hsu, Volume growth and escape rate of Brownian motion on a Cartan-Hadamard manifold, Sobolev spaces in mathematics. II, Int. Math. Ser. (N.Y.), **9**, 209–225, Springer, New York, 2009.
- [HQ10] E. Hsu and G. Qin, Volume growth and escape rate of Brownian motion on a complete Riemannian manifold, *Ann. Probab.* **38** (2010), 1570–1582.
- [O] S. Ouyang, Volume growth, comparison theorem and escape rate of diffusion process, preprint.

• 対称飛躍（拡散）型マルコフ過程の保存性に関する論文

- [GHM11] A. Grigor'yan, X. Huang and J. Masamune, On stochastic completeness of jump processes, *Math. Z.* **27** (2012), 1211–1239.
- [MU11] J. Masamune and T. Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **47** (2011), 650–662.
- [MUW12] J. Masamune, T. Uemura and J. Wang, On the conservativeness and the recurrence of symmetric jump-diffusions, *J. Funct. Anal.* **263** (2012), 3984–4008.
- [S] Y. Shiozawa, Conservation property of symmetric jump-diffusion processes, to appear in *Forum Math.*
- [SU] Y. Shiozawa and T. Uemura, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on \mathbb{R}^d , to appear in *J. Theoret. Probab.*

• 重み付きグラフ上のマルコフ連鎖の保存性 / 脱出レートに関する論文

- [F] M. Folz, Volume growth and stochastic completeness of graphs, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [H1] X. Huang, Escape rate of Markov chains on infinite graphs, to appear in *J. Theoret. Probab.*
- [H2] X. Huang, A note on the volume growth criterion for stochastic completeness of weighted graphs, to appear in *Potential Anal.*
- [HS14] X. Huang and Y. Shiozawa, Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs, *Stochastic Processes Appl.* **124** (2014), 317–347.