Application of the minimizing movement scheme to parabolic-parabolic Keller-Segel system

三村 与士文 (東京理科大学)

本講演では, 次の退化拡散項を持つ Keller-Segel 系を勾配流として定式化し, 時間大域解の存在を示す.

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (\nabla u^m - \chi u \nabla v) & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \varepsilon \partial_t v = \Delta v - \gamma v + \alpha u & \text{in } \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \varepsilon v(x,0) = \varepsilon v_0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{KS}$$

ここで, $\alpha, \chi, \varepsilon$ は正定数, γ は非負定数とする. また, Ω は $\mathbb{R}^d$ の滑らかな境界を持つ有界領域として, 次の境界条件 (BCD) または (BCN) を課す.

$$\frac{\partial u^m}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \chi u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{BCD}$$

$$\frac{\partial u^m}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \chi u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{BCN}$$

いずれの境界条件においても, u の Ω での総質量は保存される. さらに我々は,

$$m = 2 - \frac{2}{d},\ d > 2$$

の場合を考察する.

(KS) は, $\varepsilon = 0$ の放物型-楕円型系において, $\Omega = \mathbb{R}^d$ のとき, 爆発解が存在するか否かを隔てる質量の閾値 M_c の存在が知られている [2, 5]. すなわち, $\|u_0\| < M_c$ ならば (KS) の解は時間大域的に存在し, 他方, $M > M_c$ を満たす任意の M に対して, $\|u_0\|_{L^1} = M$ となる (KS) の爆発解が存在する. $\varepsilon > 0$ の放物型-放物型の系に対しても同様の閾値の存在が予想されている. 我々は, 放物型-放物型系に対する閾値の問題を勾配流の視点から解析する.

Euclid 空間での minimizing movement scheme から始める. 今 f を $\mathbb{R}^d$ 上の C^1-級関数, $\tau > 0$ を時間ステップサイズ, $x_\tau^0 := x_0$ を初期値として, x_τ^k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$x_\tau^k \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ f(x) + \frac{1}{2\tau} |x - x_\tau^{k-1}|^2 \right\},$$

すなわち, 関数 $f(x) + \frac{1}{2\tau}|x - x_\tau^{k-1}|^2$ の $\mathbb{R}^d$ 上の最小点として定義すれば (ここでは最小点の存在を仮定しておく), x_τ^k は

$$\frac{x_\tau^k - x_\tau^{k-1}}{\tau} = -\nabla f(x_\tau^k)$$

を満たす．これは勾配流 $\dot{x} = -\nabla f(x)$ に対する Euler の後退差分式に他ならない．したがって, 離散解 x_τ を

$$x_\tau(t) := x_\tau^k \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau]$$

と定義すれば, 離散解は $\tau \to 0$ の極限において勾配流 $\dot{x} = -\nabla f(x)$ の解に収束し得る．離散解の $\tau \to 0$ における極限集合を "minimizing movement" という [1].

我々は, 上記の Euclid 空間での勾配流の解の構成法と類似の方法によって, (KS) の時間大域解を構成する．すなわち, (KS) の Lyapunov 汎関数として知られる

$$\phi_m(u, v; \alpha, \chi, \gamma) := \frac{1}{m-1} \int_\Omega u^m \, dx - \chi \int_\Omega uv \, dx + \frac{\chi}{2\alpha} \int_\Omega |\nabla v|^2 + \gamma v^2 \, dx$$

と確率測度空間上の Wasserstein 距離 d_W を用いて定義される距離

$$d(w_1, w_2) := \sqrt{\|u_1\|_{L^1} \|u_2\|_{L^1} d_W^2 \left(\frac{u_1}{\|u_1\|_{L^1}}, \frac{u_2}{\|u_2\|_{L^1}} \right) + \frac{\varepsilon\chi}{\alpha} \|v_2 - v_1\|_{L^2}^2},$$
$$w_1 := (u_1, v_2),\ w_2 := (u_2, v_2)$$

を用いて, w_τ^k を次で定義する．

$$w_\tau^k \in \operatorname*{argmin}_{w \in X_M} \left\{ \phi_m(w; \alpha, \chi, \gamma) + \frac{1}{2\tau} d^2(w, w_\tau^{k-1}) \right\}, \quad w_\tau^0 := (u_0, v_0). \qquad \text{(MMS)}$$

ここで, X_M は境界条件 (BCD) または (BCN) に応じて, 次の $X_M^D(\Omega)$ または $X_M^N(\Omega)$ のいずれかとする．

$$X_M^D(\Omega) := \left\{ (u, v) \in L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \ ; \ \|u\|_{L^1} = M, u \geq 0, v \geq 0 \right\},$$
$$X_M^N(\Omega) := \left\{ (u, v) \in L^m(\Omega) \times H^1(\Omega) \ ; \ \|u\|_{L^1} = M, u \geq 0, v \geq 0 \right\}.$$

命題 1.

$$M_* := \sup \left\{ M \ ; \ \inf_{(u,v) \in X_M} \phi_m(u, v; \alpha, \chi, \varepsilon + \gamma) > -\infty \right\}$$

と定義する．このとき, $M < M_*$ を満たす任意の $(u_0, v_0) \in X_M$ と任意の $\tau > 0$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して (MMS) は解を持つ．

(MMS) に対する Euler-Lagrange 方程式を導くことによって, "minimizing movement" が (KS) の時間大域解であることを示すことができる [3, 4]．この解は X_M が $X_M^D(\Omega)$ であるか $X_M^N(\Omega)$ であるかに応じて, 境界条件 (BCD) または (BCN) を満たす．

定理 2. $M < M_*$ を満たす任意の $(u_0, v_0) \in X_M$ かつ $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して, (KS) の時間大域的弱解が存在する．

次の定理は, 境界条件による閾値の変化を表す関係式である．

定理 3. X_M が $X_M^D(\Omega)$ であるか $X_M^N(\Omega)$ であるかに応じて, M_* を M_D または M_N と表す．このとき,

$$M_N = \frac{M_D}{2}$$

が成り立つ．

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser, (2005).

[2] A. Blanchet, J. A. Carrillo, and PH.Laurençot, *Critical mass for a Patlak-Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations 35 (2009), pp.133-168.

[3] A. Blanchet and PH. Laurençot, *The Parabolic-Parabolic Keller-Segel System with Critical Diffusion as a Gradient Flow in* $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, Comm. Partial Differential Equations 38 (2013), 658-686.

[4] Y. Mimura, *Variational formulation of the fully parabolic Keller-Segel system with degenerate diffusion*, Preprint.

[5] T. Suzuki, R. and Takahashi, Ryo, *Degenerate parabolic equation with critical exponent derived from the kinetic theory. II. Blowup threshold*, Differential Integral Equations 22 (2009), no. 11-12, 1153-1172.