Non-trivial ω-limit sets and oscillating solutions in a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass[*1]

山田 哲也[*2]

1 導入

本講演では, 細胞性粘菌の集中現象や重力運動下における粒子の相互作用を記述する移流拡散方程式系から導出された以下の初期値問題について考察する.

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla N * u)), & t > 0,\, x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,t) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

ただし, $N(x)$ は $\mathbb{R}^2$ の Newton ポテンシャルで, $(\nabla N * u)(t,x)$ は

$$(\nabla N * u)(t,x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} u(t,y)\, dy, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^2$$

である.

方程式 (P) において重要な性質の 1 つは以下の等式が成り立つことである:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

性質 (1.1) は質量保存と呼ばれ, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx$ の値が (P) の非負解の大域的存在・非存在に大きく関わっている:

Case 1 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx > 8\pi$ の場合 ([1, 7, 11])
(P) の非負解は有限時間で爆発する.

Case 2 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx < 8\pi$ の場合 ([2, 6, 7, 8, 10, 14, 15])
(P) の非負解は時間大域的に存在する. また, その解は $t \to \infty$ で球対称な (P) の自己相似解に近づきながら 0 に減衰する.

Case 3 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\, dx = 8\pi$ の場合
(P) の非負解は時間大域的に存在する ([16]). しかし, その解の $t \to \infty$ での挙動は非常に複雑である. これを説明するために, ω 極限集合の概念を導入する.

[*1] 本研究は Julián López-Gómez 氏 (Univ. Complutense de Madrid) と永井敏隆氏 (広島大学) との間で行われた共同研究 [13] に基づく.

[*2] 所属: 福井工業高等専門学校一般科目教室自然科学系　Email: yamada@fukui-nct.ac.jp

定義 1.1. $u(t,x;u_0)$ を u_0 を初期値とする (P) の時間大域解とする．このとき, ω 極限集合 $\omega(u_0)$ を以下のように定義する:

$$w(u_0) = \{\varphi \mid t_n \to \infty \text{ を満たすある数列 } t_n \text{に対して，} \lim_{n\to\infty} \|u(t_n) - \varphi\|_{L^\infty} = 0\}$$

この ω 極限集合の観点から, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ の場合の結果を整理すると, 以下のようになる:

(a) ([5]) $u_0 \log u_0, |x|^2 u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ の下で,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty, \quad \lim_{t\to\infty} u(t,\cdot) = 8\pi\delta_{x_0} \quad (\text{測度の意味で})$$

が成り立つ．ただし δ_{x_0} は点 x_0 におけるデルタ関数で, x_0 は u_0 の重心, すなわち $x_0 = \int_{\mathbb{R}^2} xu_0(x)\,dx/(8\pi)$ である．従って, $\omega(u_0) = \emptyset$ となる．

(b) ([2, 4, 12]) ある $b > 0$ に対して以下の Lyapunov 汎関数の u_0 での値

$$\mathcal{H}_b[u_0] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sqrt{u_0(x)} - \sqrt{\theta_b(x)}\right)^2 (\theta_b(x))^{-1/2}\,dx \tag{1.2}$$

が有限である (よって, $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $|x|^2 u_0 \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ である) ならば, 非負解は有界な時間大域解で,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \theta_{b,x_0}\|_{L^p} = 0, \quad 1 \le p \le \infty.$$

ただし,

$$\theta_{b,x_0}(x) = \frac{8b}{(|x-x_0|^2 + b)^2}, \quad b > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^2$$

は (P) の定常解で, $\|\theta_{b,x_0}\|_{L^1} = 8\pi$, $|x|\theta_{b,x_0} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $|x|^2\theta_{b,x_0} \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ を満たす．また, x_0 は u_0 の重心, すなわち, $x_0 = \int_{\mathbb{R}^2} xu_0(x)\,dx/8\pi$ である．従って, $\omega(u_0) = \{\theta_{b,x_0}\}$ となる．

(c) ([17]) $0 < a < b$ とする．このとき,

$$\{\theta_c \,|\, a \le c \le b\} \subset \omega(u_0)$$

が成り立つような非負かつ**球対称な**初期値 u_0 が存在する．

以後, u_0 を $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ を満たす非負な L^1 関数とする．本講演では, ω 極限集合 $\omega(u_0)$ を調べることで, (P) の有界な時間大域解の挙動を考察する．

2　主結果

本講演の 3 つの主結果を紹介する．まず (P) の非負解 $u(t)$ が時間大域的で, 以下を満たすものとする: ある $\tau > 0$ に対して

$$\sup_{t\geq\tau} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty. \tag{2.1}$$

このとき, 以下の定理が成り立つ．

定理 2.1. $\log(1+|x|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ の下で,

(i) 軌道 $\{u(t) \,|\, t \geq \tau\}$ は L^∞ において相対コンパクトである．
(ii) ω 極限集合 $w(u_0)$ はコンパクトかつ連結な空でない L^∞ の部分集合である．
(iii) $w(u_0) \subset \{\theta_{b,x_0} \mid b > 0, x_0 \in \mathbb{R}^2\}$.
(iv) さらに, u_0 がある点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して**球対称**であるならば, $\omega(u_0) = \{\theta_{c,x_0} \mid a \leq c \leq b\}$ となる $0 < a \leq b$ が存在する．

よって, 既知結果 (b) と定理 2.1 の (iv) より**有界かつ球対称**である非負な (P) の時間大域解はどちらか一方を満たすことがわかる:

(A) $t \to \infty$ のとき, ある定常解に収束する．
(B) 2 つの定常解の間を振動する．

次に, 上記の (B) のような解, すなわち, ある点 x_0 に関して**球対称**で, 2 つの定常解の間を振動する有界かつ非負な (P) の時間大域解は実際に存在することを証明した．よって, 以下の定理は部分的に得られていた [17] の結果を改良し, [2] で提出された予想を肯定的に解決した定理になっている．

定理 2.2. $0 < a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき, x_0 に関して**球対称**である非負な初期値 u_0 が存在して, 以下の条件を満たす:

(i) $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} xu_0(x)\,dx = 8\pi x_0$.
(ii) 十分大きい $|x|$ に対して, $C_1|x|^{-4} \leq u_0(x) \leq C_2|x|^{-4}$.
(iii) $\omega(u_0) = \{\theta_{c,x_0} \mid a \leq c \leq b\}$.

最後に, 以下のような有界かつ非負な (**球対称**とは限らない)(P) の時間大域解も存在する．

定理 2.3. $0 < a < b$ とする．また, ε_n を $\varepsilon_n \to 0\,(n \to \infty)$ を満たす狭義単調減少列とする．このとき, $t_n \to \infty\,(n \to \infty)$ を満たす狭義単調増加列 t_n と以下の条件を満たす非負な関数 u_0 が存在する:

(i) $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} xu_0(x)\,dx = 0$.

(ii) 十分大きい $|x|$ に対して, $C_1|x|^{-4} \le u_0(x) \le C_2|x|^{-4}$.

(iii) $1 \le p \le \infty$ に対して,

$$\|u(t_n) - \theta_{a,0}\|_{L^p} < \varepsilon_n \quad n \text{ が偶数},$$
$$\|u(t_n) - \theta_{b,0}\|_{L^p} < \varepsilon_n \quad n \text{ が奇数}.$$

よって, $(a,0)$ と $(b,0)$ を結ぶ $(0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ における連続曲線 $\{(c(s), x(s)) \mid 0 \le s \le 1\}$ が存在して, $\{\theta_{c(s),x(s)} \mid 0 \le s \le 1\} \subset \omega(u_0)$ を満たす.

本講演では, 関連する既存研究にふれ, 上記の 3 つの結果を述べた後, 残りの時間で定理 2.1 と定理 2.2 の証明を中心に解説する予定である.

参考文献

[1] P. Biler, D. Hilhorst, and T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, Ⅱ, Colloq. Math., **67** (1994), 297–308.

[2] P. Biler, G. Karch, P. Laurençot, and T. Nadzieja, The $8\pi-$problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane, Math. Meth. Appl. Sci., **29** (2006), 1563–1583.

[3] P. Biler and T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interactions of particles, I, Colloq. Math., **66** (1994), 319–334.

[4] A. Blanchet, E. Carlen, and J. A. Carrillo, Functional inequalities, thick tails and asymptotics for the critical mass Patlak-Keller-Segel model, J. Funct. Anal., **262** (2012), 2142–2230. .

[5] A. Blanchet, J. A. Carrillo, and N. Masmoudi, Infinite time aggregation for the critical Paltak-Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$, Comm. Pure Appl. Math., **61** (2008), 1449–1481.

[6] A. Blanchet, J. Dolbeault, M. Escobedo, and J. Fernández, Asymptotic behavior for small mass in the two-dimensional parabolic-elliptic Keller-Segel model, J.

Math. Anal. Appl., **361** (2010), 533–542.

[7] A. Blanchet, J. Dolbeault, and B. Perthame, Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions, Electron. J. Differential Equations, (2006), No.44, 1–33.

[8] J. Campos and J. Dolbeault, Asymptotic estimates for the parabolic-elliptic Keller-Segel model in the plane, preprint.

[9] W. Chen and C. Li, Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations, Duke Math. J., **63** (1991) 615–622.

[10] J. Dolbeault and B. Perthame, Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), 611–616.

[11] M. Kurokiba and T. Ogawa, Finite time blow-up of the solution for a nonlinear parabolic equation of drift-diffusion type, Differential Integral Equations, **16** (2003), 427-452.

[12] J. Lopez-Gomez, T. Nagai and T. Yamada, The basin of attraction of the steady-states for a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass. Arch. Ration. Mech. Anal. **207** (2013), 159–184.

[13] J. Lopez-Gomez, T. Nagai and T. Yamada, Non-trivial ω-limit sets and oscillating solutions in a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass, submitted.

[14] T. Nagai, Global existence and decay estimates of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, Differential Integral Equations, **24** (2011), 29–68.

[15] T. Nagai, Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, Adv. Differential Equations, **16** (2011), 839–866.

[16] T. Nagai and T. Ogawa, Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, preprint.

[17] Y. Naito and T. Senba, Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional solutions, Commun. Pure Appl. Anal., **12** (2013), 1861–1880.