CHEEGER TYPE p-SOBOLEV SPACES AND p-HARMONIC MAPS

熊本大学・自然科学研究科　桑江一洋

1. 最初に

この講演では参考文献 [4] の結果の内, L^p-写像上の Cheeger 型の p-エネルギー汎関数の最小点としての p-調和写像の構成に関わる部分のみ報告する. なお, [4] では L^p-Wasserstein 空間上の汎関数も扱える形式で一般的な結果を得ているが, 汎関数が定義される空間の p-一様凸性と汎関数の λ-凸性の条件が Ambrosio-Gigli-Savaré [1] の方法論に沿うため, 一般的であるが種々の場合を網羅するため煩雑な記述となっている. しかし target 空間が Alexandrov の意味で global な非正曲率空間 (CAT(0)-空間と呼ぶ) のときにはそこへの L^p-写像空間上の Cheeger 型の p-エネルギー汎関数は測地線に沿った凸汎関数になるので, 簡明な対象となる. なお, 当初は [1] で展開されているような勾配流の構成を基づく結果を目指していたが, その方向での記述はまだ成功していない. p-勾配流の構成はある条件下で可能ではあるが, その一意性と半群性が現時点で保証されていない. このことがこの方向での記述の障害となっている. $p=2$ の場合は CAT(0)-空間上の下半連続凸汎関数に対して一意性と半群性が保証された 2-勾配流が [5] によって ([1] では Hilbert 空間上の L^2-Wasserstein 空間上で) 構成されているが, 一般の $p>1$ ではこれがまだ不明である. そのかわりに非線形なレゾルヴェント流をもとにした flow を用いて上記の意味での p-調和写像を $p\geq 2$ の場合にディリクレ境界値問題の解として構成に成功した. これは $p=2$ の場合の太田慎一氏 [6] による Cheeger 型のエネルギー汎関数の 2-調和写像の構成の拡張になる.

2. レゾルヴェント流の一般枠組みでの結果

ただ, 一般枠での結果に基づく証明なのでこの節では一般枠の結果を限定された条件下で述べる. 次節で Cheeger 型の p-エネルギー汎関数に適用した結果を述べる. $p\in]1,+\infty[$ を固定する.

2.1. **Resolvents.** (H,d_H) を完備距離空間, $E: H \to]-\infty,+\infty]$ を proper な関数とする. ここで proper とは E の定義域 $D(E):=\{x\in H \mid E(x)<+\infty\}$ が空でないこととする. (H,d_H) としては 次節で展開する完備 CAT(0)-空間値 L^p-写像の空間を念頭においており, それは完備な p-一様凸空間となっている. E としては次節で扱う Cheeger 型 p-エネルギー汎関数を想定している.

Date: ２０１３年１０月５日 (土)　熊本大学応用解析セミナー.

定義 2.1 (Moreau-Yosida 近似, coercivity)**.** $E^\tau : H \to [-\infty, +\infty]$ を

$$E^\tau(x) := \inf_{y \in H} \left(E(y) + \frac{1}{p\tau^{p-1}} d_H^p(y,x) \right), \qquad x \in H,\ \tau > 0$$

で定め E の *Moreau-Yosida* **近似**, *Hamilton-Jacobi* **半群** もしくは *Hopf-Lax formula* と呼ぶ. E が proper であることから, H 上で $E^\tau < +\infty$ が常に成立する. E が *coercive* であるとは $\tau > 0$ と $x \in H$ がとれて $E^\tau(x) > -\infty$ が成立することとする.

以下, $E : H \to]-\infty, +\infty]$ は常に proper で coercive であるとする. $k \in]0, +\infty[$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 次の条件を考える：

仮定 2.2. 任意の $z \in H$, $x, y \in D(E)$ に対し, $\gamma_0 = x$ かつ $\gamma_1 = y$ を満たす z に依存してもよい曲線 $\gamma = \gamma^z : [0,1] \to H$ で $\tau \in]0, (k/p\lambda^-)^{q-1}[$ 毎に $t \mapsto E(\gamma_t) + \frac{1}{p\tau^{p-1}} d_H^p(z, \gamma_t)$ が p-strongly $\left(\frac{k}{p\tau^{p-1}} + \lambda\right)$-convex となるものがとれる: すなわち $t \in [0,1]$ と $\tau \in]0, (k/p\lambda^-)^{q-1}[$ に対し,

$$\begin{aligned} E(\gamma_t) + &\frac{1}{p\tau^{p-1}} d_H^p(z, \gamma_t) \\ &\le (1-t)E(\gamma_0) + tE(\gamma_1) + \frac{1-t}{p\tau^{p-1}} d_H^p(z, \gamma_0) \\ &\qquad + \frac{t}{p\tau^{p-1}} d_H^p(z, \gamma_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{p\tau^{p-1}} + \lambda\right) t(1-t) d_H^p(\gamma_0, \gamma_1). \end{aligned}$$

定義 2.3 (**Local slope, global slope, 停留点**)**.** E の $x \in H$ での *local slope* を

$$|\partial E|(x) := \begin{cases} \displaystyle\varlimsup_{y \to x} \frac{(E(x)-E(y))^+}{d_H(x,y)} & x \in D(E), \\ +\infty & x \notin D(E) \end{cases}$$

で定め $D(|\partial E|) := \{x \in H \mid |\partial E|(x) < +\infty\}$ とする. E の $x \in H$ での *global slope* $\mathfrak{l}_E$ を

$$\mathfrak{l}_E(x) := \sup_{y \neq x} \frac{(E(x) - E(y))^+}{d_H(x,y)}$$

で定める. 点 $x \in D(|\partial E|)$ が E の**停留点**とは $|\partial E|(x) = 0$ が満たされることとする.

命題 2.4. $E : H \to]-\infty, +\infty]$ が 仮定 2.2 をある $\lambda \ge 0$ と $k \in]0, +\infty[$ で満たせば. $x \in D(E)$ に対し $|\partial E|(x) = \mathfrak{l}_E(x)$ が成立する. このことから $x \in D(E)$ が停留点であることと最小点であることは同等になる. また E が下半連続なら $|\partial E|$ も下半連続になることがこれからわかる.

仮定 2.2 の下で次が成立する：

命題 2.5 (**非線形レゾルヴェントの一意存在**)**.** 下半連続な $E : H \to]-\infty, +\infty]$ が 仮定 2.2 をある $\lambda \in \mathbb{R}$ と $k \in]0, +\infty[$ で満たすとす

る．このとき任意の $x \in H$ と $\tau \in]0,(k/p\lambda^-)^{q-1}[$ に対して一意的な元 $J_\tau(x) \in D(E)$ で

$$E^\tau(x) = E(J_\tau(x)) + \frac{1}{p\tau^{p-1}} d_H^p(x, J_\tau(x))$$

をみたすものがとれる．

命題 2.6 (**仮定 2.2での slope 評価**)**.** 下半連続な $E : H \to]-\infty,+\infty]$ が仮定 2.2 をある $\lambda \in \mathbb{R}$ と $k \in]0,+\infty[$ でみたすとする．$x \in D(|\partial E|)$ と $\tau < (k/p\lambda^-)^{q-1}$ に対し

$$\begin{aligned}|\partial E|^q(J_\tau(x)) &\le \left(\frac{d_H(J_\tau(x),x)}{\tau}\right)^p \\ &\le \frac{2}{k+\lambda p\tau^{p-1}} \cdot \frac{E(x)-E^\tau(x)}{\tau} \\ &\le \frac{2}{k+\lambda p\tau^{p-1}} \cdot \frac{1}{q}\left(\frac{k}{k-p\tau^{p-1}\lambda^-}\right)^{q-1} |\partial E|^q(x).\end{aligned}$$

この評価から $x \in D(E)$ が停留点なら x は J_τ の不動点になる，すなわち $J_\tau(x) = x$, $\tau \in]0,(k/p\lambda^-)^{q-1}[$.

定理 2.7 (**レゾルヴェント流の極限としての最小点の存在**)**.** 下半連続な $E : H \to]-\infty,+\infty[$ が仮定 2.2をある $\lambda \ge 0$ と $k \in]0,+\infty[$ でみたすとする．固定した $x \in H$ に対し $\{J_\tau(x)\}_{\tau \ge 0}$ を E に対応するレゾルヴェントとする．$\inf_{n\in\mathbb{N}} E(J_{\tau_n}(x)) > -\infty$ かつ $\sup_{n\in\mathbb{N}} d_H(J_{\tau_n}(x),x) < \infty$ をみたす無限遠に発散する部分列 $\{\tau_n\}$ の存在を仮定する．このとき E は下に有界であり，E の最小点 $\bar{x} \in H$ で

$$\lim_{\tau\to\infty} d_H(J_\tau(x),\bar{x}) = 0.$$

をみたすものが存在する．さらに $\lambda > 0$ なら最小点は一意である．

3. 上勾配と Cheeger 型 Sobolev 空間

(X,d_X) を距離空間で U を開部分集合で $\mathfrak{m}$ を X 上の Borel 正則測度で開球の測度が正で有限であるとする．(Y,d_Y) を別の完備な測地空間とする．

定義 3.1 (**上勾配**)**.** Borel 関数 $g : U \to [0,+\infty]$ が写像 $u : U \to Y$ の**上勾配**であるとは弧長径数曲線 $c : [0,\ell] \to U$, に対し

$$d_Y(u(c(0)),u(c(\ell))) \le \int_0^\ell g(c(s))\mathrm{d}s$$

が成立することとする．

定義 3.2. 写像 $u : U \to Y$ と点 $z \in U$ に対し

$$\mathit{Lip}\, u(z) := \varliminf_{r\to 0} \sup_{d_X(z,w)=r} \frac{d_Y(u(z),u(w))}{r},$$
$$\mathrm{Lip}\, u(z) := \lim_{r\to 0} \sup_{0<d_X(z,w)<r} \frac{d_Y(u(z),u(w))}{d_X(z,w)}$$

とする．z が U の孤立点の場合は $\mathit{Lip}\, u(z) = \mathrm{Lip}\, u(z) = 0$ となっている．明らかに U 上で $\mathit{Lip}\, u \le \mathrm{Lip}\, u$.

Cheeger [2] は局所 Lipschitz 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対し $\mathit{Lip}\, f$, 従って $\mathrm{Lip}\, f$ が f の上勾配になることを示した．同様の議論で 局所 Lipschitz 写像 $u : U \to Y$ でも類似のことが成立する．定点 $o \in Y$ を基点として固定し $p \in [1, +\infty[$ をとり $L^p_o(U, Y; \mathfrak{m})$ を基点 o に依存する U から Y への L^p-写像の空間とする．o を略して $L^p(U, Y; \mathfrak{m})$ と書く．

定義 3.3 (Cheeger 型 Sobolev 空間). $u \in L^p(U, Y; \mathfrak{m})$ に対し Cheeger 型の u の p-エネルギー汎関数を

$$\mathsf{Ch}(u) := \inf_{\{(u_i,g_i)\}_{i=1}^{+\infty}} \varliminf_{i\to+\infty} \|g_i\|^p_{L^p(U;\mathfrak{m})},$$

で定める．ここで下限は u_i が u に L^p-収束して各 g_i が u_i の上勾配になる列 $\{(u_i, g_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ に渡るものとする．*Cheeger* **型** $(1,p)$-*Sobolev* **空間**を

$$H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m}) := \{u \in L^p(U, Y; \mathfrak{m}) \mid \mathsf{Ch}(u) < +\infty\}.$$

で定める．定義から $u = v$ $\mathfrak{m}$-a.e. on U なら $\mathsf{Ch}(u) = \mathsf{Ch}(v)$.

以後 (Y, d_Y) を完備で Alexandrov の意味で global に曲率非正の空間 (CAT(0)-空間) とする．$u, v \in H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m})$ に対し, $d_Y(u, o), d_Y(u, v) \in H^{1,p}(U, \mathbb{R}; \mathfrak{m})$ で $\mathsf{Ch}(d_Y(u, o)) \le \mathsf{Ch}(u)$, $\mathsf{Ch}(d_Y(u, v))^{1/p} \le \mathsf{Ch}(u)^{1/p} + \mathsf{Ch}(v)^{1/p}$ が成立する．また $H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m})$ 上の距離 $d_{H^{1,p}}$ を $u, v \in H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m})$ に対し

$$d_{H^{1,p}}(u, v) := d_{L^p}(u, v) + \|g_u - g_v\|_{L^p(U;\mathfrak{m})}$$

で定める．ここで g_u, g_v はそれぞれ $u, v \in H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m})$ の**極小一般化上勾配**である (その存在は [6] で保証されている)．$H^{1,p}_0(U)$ を $\{f \in H^{1,p}(U) \mid \mathrm{supp}[f] \subset U\}$ の $H^{1,p}$-閉包とする．$v \in H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m})$ に対し

$$H^{1,p}_v(U, Y; \mathfrak{m}) := \{u \in H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m}) \mid d_Y(u, v) \in H^{1,p}_0(U)\}$$

とおく．このとき $H^{1,p}_v(U, Y; \mathfrak{m})$ は $H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m})$ において距離 $d_{H^{1,p}}$ に関して閉凸部分集合となる．$\phi \in H^{1,p}(U, Ym)$ かつ $\psi \in H^{1,p}_\phi(U, Y; \mathfrak{m})$ なら $H^{1,p}_\phi(U, Y; \mathfrak{m}) = H^{1,p}_\psi(U, Y; \mathfrak{m})$ が容易にわかる．$u, v \in H^{1,p}_\phi(U, Y; \mathfrak{m})$ に対し $d_Y(u, v) \in H^{1,p}_0(U)$ が容易にわかる．

定義 3.4 (調和写像). 写像 $\phi \in H^{1,p}(U, Y; \mathfrak{m})$ が **調和**であるとは

$$\mathsf{Ch}(\phi) = \inf_{u \in H^{1,p}_\phi(U,Y;\mathfrak{m})} \mathsf{Ch}(u)$$

が成立することとする.

以下において $\partial U \neq \emptyset$ とし $\phi \in H^{1,p}(U,Y;\mathfrak{m})$ を固定する. $u_0 \in L^p_o(U,Y;\mathfrak{m})$ に対し,

$$\mathsf{Ch}^{\tau,\phi}(u_0) := \inf\left\{\mathsf{Ch}(w) + \frac{1}{p\tau^{p-1}} d^p_{L^p}(w,u_0) \;\middle|\; w \in H^{1,p}_{\phi}(U,Y;\mathfrak{m})\right\}.$$

定理 3.5 (**境界値問題の解としての調和写像の構成**). $p \geq 2$ を仮定する.[1] $\phi \in H^{1,p}(U,Y;\mathfrak{m})$ と $u_0 \in L^p(U,Y;\mathfrak{m})$ に対し, 次が成立する.

(1) $\tau > 0$ に対し, $\mathsf{Ch}^{\tau,\phi}(u_0)$ の 一意的な最小点 $J_\tau(u_0)$ が $H^{1,p}_{\phi}(U,Y;\mathfrak{m})$ 内に存在する.

(2) 無限遠に発散する部分列 $\{\tau_n\}$ で $\{d_{L^p}(J_{\tau_n}(u_0),u_0)\}$ が有界なら. $\bar{u}_0 = \lim_{\tau\to\infty} J_\tau(u_0)$ が $H^{1,p}_{\phi}(U,Y;\mathfrak{m})$ で存在して $\mathsf{Ch}(\bar{u}_0) = \lim_{\tau\to\infty}\mathsf{Ch}(J_\tau(u_0))$ をみたし, $\bar{u}_0$ は定義 3.4の意味で調和写像になる.

(3) 非減少上半連続関数 $\varphi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ があって

$$\|f\|_{L^p(U;\mathfrak{m})} \leq \varphi\left(\mathsf{Ch}(f)\right) \quad \forall f \in H^{1,p}_0(U)$$

が成立すれば, (2) と同じ結論が成立する.

(4) $\varepsilon > 0$ が $\|d_Y(u_o,\phi)\|_{L^\infty(U\setminus U_\varepsilon;\mathfrak{m})} < \infty$ を満たすようにとれるとする. ここで $U_\varepsilon := \{x \in U \mid d(x,U^c) \geq \varepsilon\}$. このとき (2) と同じ結論が成立する.

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Second edition. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[2] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 3, 428–517.

[3] K. Kuwae, *Jensen's inequality on convex spaces*, preprint 2013, to appear in Calc. Var. Partial Differential Equations.

[4] K. Kuwae, *Resolvent flows for convex functionals and harmonic maps*, (2013), preprint.

[5] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 2, 199–253.

[6] S.-I. Ohta, *Cheeger type Sobolev spaces for metric space targets*, Potential Anal. **20** (2004), no. 2, 149–175.

Kazuhiro Kuwae
Department of Mathematics and Engineering
Graduate School of Science and Technology
Kumamoto University
Kumamoto, 860-8555
JAPAN
E-mail address: `kuwae@gpo.kumamoto-u.ac.jp`

[1]この条件は CAT(0)-空間 (Y,d_Y) が p-一様凸空間になるための十分条件である. (Y,d_Y) が p-一様凸空間ならそれに値をとる L^p-写像の空間も p-一様凸空間となり, 変分原理を適用できる.