The generalized principal eigenvalue for Hamilton-Jacobi-Bellman equations of ergodic type

市原　直幸　(広島大工)*

1. 導入

この講演では，以下のエルゴード型Hamilton-Jacobi-Bellman方程式（HJB方程式）を考える．

$$\lambda - \frac{1}{2}\Delta\phi + \frac{1}{2}c(x)|D\phi|^2 + \beta V = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \quad \phi(0) = 0. \tag{EP}$$

ここでβは実数パラメータを表す．(EP)の未知変数は定数と関数の組$(\lambda, \phi) \in \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}^N)$である．(EP)はエルゴード問題あるいは加法的固有値問題と呼ばれることもある．この講演では以下の条件を常に仮定する．

(A1)　$c \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$，かつ適当な$\kappa > 0$に対して$\kappa \le c(x) \le \kappa^{-1}$.

(A2)　$V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$，　$V \ge 0$，かつ $|x| \to \infty$のとき$|x|^2 V(x) \to 0$.

仮定(A1)-(A2)の下で次の定理が成り立つ．

定理 1. ある$\lambda^* = \lambda^*(\beta)$が存在して，$\lambda$を固定したとき(EP)が古典解$\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$を持つための必要十分条件は，$\lambda \le \lambda^*(\beta)$が成り立つことである．

いま，(EP)の一般化主固有値を

$$\lambda^*(\beta) = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, (\mathrm{EP})\text{が解}\,\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)\,\text{を持つ}\}$$

により定義する．このとき，関数$\beta \mapsto \lambda^*(\beta)$に対して次が成り立つ．

定理 2. (1) $\beta \mapsto \lambda^*(\beta)$は非正，非増加，凹，かつ$\beta \to \infty$のとき$\lambda^*(\beta) \to -\infty$.

(2)　ある$\beta_c \ge 0$が存在して，$\beta \le \beta_c$のとき$\lambda^*(\beta) = 0$，かつ$\beta > \beta_c$のとき$\lambda^*(\beta) < 0$.

(3)　$N = 1, 2$ならば$\beta_c = 0$であり，$N \ge 3$ならば$\beta_c > 0$.

さて，$\lambda = \lambda^*(\beta)$に対応する(EP)の解$\phi$の集合を$\mathcal{S}(\beta)$とおく．

定理 3. (1) $\beta \ge \beta_c$ならば，$\lambda = \lambda^*(\beta)$に対応する(EP)の解$\phi$は一意的である，つまり$\mathcal{S}(\beta) = \{\phi\}$．さらに次が成り立つ．

$$C^{-1}|x| - C \le \phi(x) \le C(1 + |x|) \qquad (\beta > \beta_c) \tag{1}$$

$$C^{-1}\log(1 + |x|) - C \le \phi(x) \le C\log(1 + |x|) + C \qquad (\beta = \beta_c) \tag{2}$$

(2)　$\beta < \beta_c$ならば，任意の$\phi \in \mathcal{S}(\beta)$に対して$\phi(x) \le C\log(1 + |x|) + C$.

* e-mail: naoyuki@hiroshima-u.ac.jp
web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/~naoyuki/index.html

注意 (臨界性理論). $c(x) \equiv 1$ のとき，(EP) は次に形になる．

$$\lambda - \frac{1}{2}\Delta\phi + \frac{1}{2}|D\phi|^2 + \beta V = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

特に，ϕ がこの方程式の解であることと，関数 $h := e^{-\phi} > 0$ が線形方程式

$$-\mathcal{L}h = \lambda h \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \qquad \mathcal{L} := \frac{1}{2}\Delta + \beta V$$

の正値解であることは同値である．いま，$-\mathcal{L}$ の $L^2(\mathbb{R}^N)$ でのスペクトルを $\sigma(-\mathcal{L})$ と書くことにすると，$\lambda^*(\beta) = \inf\{z \mid z \in \sigma(-\mathcal{L})\}$ を満たすことが知られている．この意味で，$\lambda^*(\beta)$ は主固有値の一般化となっている．また，定理3と h の定義より，$\beta > \beta_c$ ならば h は $|x| \to \infty$ のとき指数減少であり，$\beta = \beta_c$ ならば多項式減少であることもわかる．

2. エルゴード的確率制御

(EP) は確率制御問題と密接な関係を持つ．$W = (W_t)$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t))$ 上で定義された N 次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，以下の確率制御問題を考える．

$$\begin{aligned}&\text{Minimize} \quad J_\beta(\xi) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[\int_0^T \left\{\frac{|\xi_t|^2}{2c(X_t^\xi)} - \beta V(X_t^\xi)\right\} dt\right] \\ &\text{subject to} \quad X_t^\xi := x - \int_0^t \xi_s\, ds + W_t, \quad t \geq 0.\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$\xi = (\xi_t) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な制御過程で，任意の $T > 0$ に対して $\text{ess-sup}_{[0,T]\times\Omega} |\xi_t| < \infty$ を満たすものとする．(3) の形の制御問題をエルゴード型確率制御と呼ぶ．(3) の最適値を $\Lambda(\beta) := \inf_{\xi \in \mathcal{A}} J_\beta(\xi)$ とし，フィードバック拡散過程を

$$dX_t = -c(X_t)D\phi(X_t)\, dt + dW_t \tag{X}$$

で定義するとき，次の定理が成り立つ．

定理 4. (1) 任意の β に対して $\Lambda(\beta) = \lambda^*(\beta)$ である．また，各 $\phi \in \mathcal{S}(\beta)$ に対して $\xi_t^* := c(X_t)D\phi(X_t)$ とおくとき，$\beta \geq \beta_c$ ならば $\Lambda(\beta) = J_\beta(\xi^*)$ であり，$\beta \leq \beta_c$ ならば $\Lambda(\beta) = J_\beta(0)$ である．

(2) $\beta \geq \beta_c$ のとき X は再帰的，特に $\beta > \beta_c$ ならば X は正再帰的である．一方，$\beta < \beta_c$ のとき X は過渡的である．

注意 (相転移). 定理2から定理4は，$\beta = \beta_c$ で「相転移」が起こることを示している．さらに，$N \geq 3$ のとき $\beta_c > 0$ であるが，これは確率論固有の現象である．実際，以下の決定論的エルゴード型制御問題を考える．

$$\begin{aligned}&\text{Minimize} \quad J_\beta(\xi) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{\frac{|\xi_t|^2}{2c(X_t^\xi)} - \beta V(X_t^\xi)\right\} dt \\ &\text{subject to} \quad X_t^\xi := x - \int_0^t \xi_s\, ds, \quad t \geq 0.\end{aligned} \tag{4}$$

(4) は確率項 W を含まないことに注意する．簡単な計算から (4) の最適値は $\Lambda(\beta) = -\max(\beta V)$ であることがわかる．特に，任意の $\beta > 0$ に対して $\Lambda(\beta) < 0$ である．一方，$N \geq 3$ のときエルゴード型確率制御 (3) の最適値 $\Lambda(\beta)$ は正の区間 $[0, \beta_c]$ で平坦 $(\Lambda(\beta) = 0)$ である．

注意 (h変換). $c(x) \equiv 1$ とする. $\phi \in \mathcal{S}(\beta)$ に対して $h = e^{-\phi}$ とおき, シュレディンガー作用素 $\mathcal{L} = (1/2)\Delta + \beta V$ の h 変換 $\mathcal{L}^h f := \dfrac{1}{h}\mathcal{L}(hf)$ を計算すると,

$$(\mathcal{L}^h + \lambda^*(\beta))f = \frac{1}{2}\Delta f + \frac{Dh}{h} \cdot D = \frac{1}{2}\Delta f - D\phi \cdot D$$

となる. 右辺は拡散過程 X の生成作用素であることに注意する. $\beta \geq \beta_c$ のとき X は再帰的なので, X に対する不変測度を $\mu = \mu(dx) = \mu(x)dx$ とおくと, $\mu := e^{-2\phi} = h^2$ である. よって, X が正再帰的であるための必要十分条件は $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$, つまり $\lambda^*(\beta)$ が $L^2(\mathbb{R}^N)$ の意味で固有値となることである.

3. 証明の方針

以下では, 定理 3 の (1) について証明の方針を述べる. 以下では次の記法を用いる.

$$F[\psi](x) := -\frac{1}{2}\Delta\psi(x) + \frac{1}{2}c(x)|D\psi(x)|^2, \quad \psi \in C^2(\mathbb{R}^N)$$

命題 5. $\beta > \beta_c$ ならば $\lambda = \lambda^*(\beta)$ に対応する (EP) の解 ϕ がただ一つ存在する.

Proof. 0. まず, $\beta > \beta_c$ ならば $\lambda^*(\beta) < 0$ であることに注意する.

1. 適当な $\rho > 0$ と $R > 0$ について以下を満たす関数 $\phi_0 \in C^3(\mathbb{R}^N)$ を見つける.

$$\lambda^*(\beta) + F[\phi_0] + \beta V \leq -\rho \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_R.$$

(これは十分小さい $\delta > 0$ を用いて $\phi_0(x) = \delta|x|$ とすれば実現できる)

2. (EP) の解 (λ, ϕ) で $\inf_{\mathbb{R}^N}(\phi - \phi_0) > -\infty$ を満たすものを構成する.
(各 $\varepsilon > 0$ ごとに方程式

$$\varepsilon\phi_\varepsilon + F[\phi_\varepsilon] + \beta V = \varepsilon\phi_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N$$

を考え, 適当な部分列に沿って極限 $\varepsilon\phi_\varepsilon(0) \to \lambda$ および $\phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon(0) \to \phi$ をとる. その際, $\varepsilon > 0$ について一様な評価式 $\phi_\varepsilon \geq \phi_0 - M$ を導くことが重要である.)

3. 等式 $\lambda = \lambda^*$ を示す. (確率論的な議論)

4. ϕ の一意性の証明. (確率論的な議論)

1 の評価は $\phi_0(x) = \delta|x|$ とおくとき直接計算により

$$F[\phi_0] + \beta V = -\frac{\delta(N-1)}{2|x|} + \frac{1}{2}c(x)\delta^2 + \beta V(x) \leq \frac{\kappa}{2}\delta^2 \leq -\lambda^*(\beta) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_R$$

とできる. □

命題 6. $\beta = \beta_c$ ならば $\lambda = \lambda^*(\beta)$ に対応する (EP) の解 ϕ が一意的に存在する.

Proof. 0. まず $\lambda^*(\beta_c) = 0$ であることに注意する.

1. 適当な $R > 0$ について以下を満たす関数 $\phi_0 \in C^3(\mathbb{R}^N)$ を見つける.

$$F[\phi_0] + \beta_c V \leq 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_R.$$

(十分小さい$\delta > 0$を用いて$\phi_0(x) = \delta \log |x|$とすれば実現できる)

2. β_cに収束する任意の減少列$\{\beta_n\}$と$\phi_n \in \mathcal{S}(\beta_n)$に対して，評価式$\phi_n \geq \phi_0 - M$を示す.

3. $n \to \infty$のときの極限$\phi_n \to \phi$をとる．$\lambda^*(\beta_n) \to \lambda^*(\beta_c) = 0$に注意.

1については，$N = 2$ならば$\beta_c = 0$なので$\phi_0 \equiv 0$ととれば良い．$N \geq 3$のときは$\phi_0(x) = \delta \log |x|$とおくと，直接計算により

$$F[\phi_0] + \beta V \leq -\frac{\delta(N-2)}{2|x|^2} + \frac{\kappa \delta^2}{2|x|^2} + \beta_c V(x) \leq 0 \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^N \setminus B_R$$

が示される．最後の評価式で仮定$|x|^2 V(x) \to 0$を用いていることに注意. □

4. 一般化

以下のエルゴード型HJB方程式を考える.

$$\lambda - \frac{1}{2}\Delta\phi + \frac{1}{m}c(x)|D\phi|^m + \beta V = 0 \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^N, \quad \phi(0) = 0. \tag{EP}$$

ただし，以下を仮定する.

(A1) $c \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad \kappa \leq c(x) \leq \kappa^{-1}$

(A2) $m > 1$

(A3) $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad \lim_{|x| \to \infty} |x|^{m^*} V(x) = 0, \quad \min V < 0 < \max V$

このとき以下が成り立つ.

定理 7. (1) $\beta \mapsto \lambda^*(\beta)$は非正，凹，かつ$|\beta| \to \infty$のとき$\lambda^*(\beta) \to -\infty$.

(2) 定数$\overline{\beta} \geq 0$, $\underline{\beta} \leq 0$が存在して，$\underline{\beta} \leq \beta \leq \overline{\beta}$のとき$\lambda^*(\beta) = 0$，かつ$\beta > \underline{\beta}$, $\beta < \overline{\beta}$のとき$\lambda^*(\beta) < 0$.

(3) $N \geq 3$かつ$m \geq 2$ならば$\underline{\beta} < 0 < \overline{\beta}$.

(4) $N = 2$のとき，$m > 2$ならば$\underline{\beta} < 0 < \overline{\beta}$，$m = 2$ならば$\underline{\beta} = \overline{\beta} = 0$.

注意. (EP)がドリフト項 $b(x) \cdot D\phi$ を含む場合も同様の問題を考えることができる．ただし，この場合は$\lambda^*(\beta) = \Lambda(\beta)$となるとは限らない.

参考文献

[1] N. Ichihara, Criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations and stochastic ergodic control, to appear in J. Math. Pures Appl.

[2] N. Ichihara, The generalized principal eigenvalue for Hamilton-Jacobi-Bellman equations of ergodic type, in preparation.