Unconditional well-posedness of the fifth order modified KdV equation with periodic boundary condition

加藤 孝盛　(京都大学大学院理学研究科)

本講演は周期境界条件下で修正 KdV 階層の一つである次の 5 次修正 KdV 方程式に対する初期値問題の適切性を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^5 u - 6\partial_x(u^5) - 10\partial_x(u(\partial_x u)^2) + 10\partial_x^2(u^2\partial_x u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $u : [0,T] \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ とする. (1) の非線形項には 3 階の微分が含まれており, これによる可微分性の損失を解消することが本研究の最も難しい点である. まず本研究に関連する既存の結果を述べる. $\mathbb{R}$ の場合, S. Kwon [2] が線形部分から従う平滑化効果を用いて, $s \geq 3/4$ で局所適切性 (LWP) を証明した. 一方 $\mathbb{T}$ 上ではこのような平滑化効果がないので $\mathbb{R}$ の場合に比べて難しい. $\mathbb{T}$ 上では, Bourgain [1] が Fourier 制限法により修正 KdV 方程式 $\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u^2\partial_x u = 0$ に対して LWP を $s \geq 1/2$ で証明した. ただし, 修正 KdV 方程式がもつ微分の損失は 1 階であるのに対して, (1) では 3 階の微分の損失が存在するためより困難であることを注意しておく. そこで我々は主に非線形項の代数的構造を利用することにより, このような困難を回避し, (1) に対して $s \geq 3/2$ で LWP と無条件一意性を証明することに成功した. ここで無条件一意性とは何らかの補助空間との共通部分ではなく連続空間全体 $C([0,T]; H^s)$ で一意性が成立することを意味する. (1) では任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して直接的な逐次近似法が機能しないため, 非線形項を単なる線形の解の摂動と捉えるだけではその解析は難しい. そこで (1) が持つ非線形項の特徴, 特に代数的な構造を利用し強い非線形相互作用を相殺させることが本研究の最も重要な部分である.

5 次修正 KdV 方程式を含む修正 KdV 階層は完全可積分系であり, 次のような無限個の保存則を持つことが知られている.

$$\begin{aligned} E_1(u(t)) &= \int_{\mathbb{T}} u^2(t)dx = E_1(u_0), \\ E_2(u(t)) &= \int_{\mathbb{T}} (\partial_x u(t))^2 + u^4(t)dx = E_2(u_0), \\ E_3(u(t)) &= \int_{\mathbb{T}} (\partial_x^2 u(t))^2 + 5u^2(t)(\partial_x u(t))^2 + u^6(t)dx = E_3(u_0), \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

ただし本証明で利用するのは E_1 と E_2 という保存量のみであり, 本質的に可積分系であることは用いていないことを注意しておく.

本証明は次の 3 つのステップにより構成される. まず時間に関する振動項が相殺される共鳴部分とそうでない非共鳴部分に分解する. 次に微分の損失をもつ共鳴部分を保存量 E_1 と E_2 を用いて線形部分を修正することにより相殺させる. 最後に残った非共鳴部分に対して normal form method という手法によりある種の平滑化効果をを引き出し, それを 3 回用いることにより 3 階の微分の損失を回復する. normal form method の詳細は講演で紹介す

ることにして, ここではその手法を用いる理由を簡単に述べる. [1] からわかるように修正 KdV 方程式に対しては Fourier 制限法が有効に働くが, (1) において Fourier 制限法により回復できる微分階数は高々2 階であり, 3 階の微分の損失を解消できない. そこで我々は修正 KdV 方程式に対する Kwon-Oh [3] の手法を基にし, Fourier 制限法の代わりに normal form method を用いた. ただし (1) に normal form method を適用するためには, 非線形項の持つ対称性を用いなければならないことを注意しておく.

以下証明の概要を紹介する. まず共鳴部分の定義とそれ上の非線形項について述べる. $v(t) = e^{-t\partial_x^5}u$ とし, これを (1) に代入し空間に関して Fourier 変換すると次が得られる.

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{v}(t,k) = &\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_5)\in\Gamma^{(5)}} e^{-t\Phi_5} 6ik_{1,2,\cdots,5}\prod_{i=1}^{5}\widehat{v}(t,k_i)\\ &+\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Gamma^{(3)}} e^{-t\Phi_3}\frac{5}{3}ik_{1,2,3}(k_{1,2}^2+k_{2,3}^2+k_{3,1}^2)\prod_{i=1}^{3}\widehat{v}(t,k_i).\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}k_{1,2,\cdots,N} :=& k_1+k_2+\cdots+k_N,\\ \Gamma^{(N)} :=& \{(k_1,k_2,\cdots,k_N)\in\mathbb{Z}^N\ ;\ k=k_{1,2,\cdots,N}\},\\ \Phi_N :=& i[(k_{1,2,\cdots,N})^5-\sum_{j=1}^{N}k_j^5].\end{aligned}$$

共鳴部分 $\Omega_R^{(N)}$ は次のように定義される.

$$\Omega_R^{(N)} := \bigl\{(k_1,k_2,\cdots,k_N)\in\Gamma^{(N)}\ ;\ \Phi_N=0\bigr\}.$$

ここで共鳴部分では振動項が消えるため, どのような平滑化効果も期待できないことを注意する.

共鳴部分 $\Omega_R^{(3)}$ 上の 3 次の非線形項を調べる. 振動項 Φ_3 は次のように因数分解できる.

$$\Phi_3 = i\frac{5}{2}k_{1,2}k_{2,3}k_{3,1}(k_{1,2}^2+k_{2,3}^2+k_{3,1}^2).$$

これにより共鳴部分は次のように書き換えられる.

$$\Omega_R^{(3)} = \bigl\{(k_1,k_2,k_3)\in\Gamma^{(3)}\ ;\ k_{1,2}k_{2,3}k_{3,1}=0\bigr\}.$$

簡単な計算により共鳴部分での 3 次非線形項 $10\partial_x(u(\partial_x u)^2) - 10\partial_x^2(u^2\partial_x u)$ は,

$$10\int_{\mathbb{T}}(\partial_x u)^2dx\partial_x u - 10\int_{\mathbb{T}}u^2dx\partial_x^3 u = 10\int_{\mathbb{T}}(\partial_x u)^2dx\partial_x u - 10E_1(u)\partial_x^3 u \tag{2}$$

と記述できる. ここで (2) の右辺第 2 項は保存則 $E_1(u)=E_1(u_0)$ を用いると $-10E_1(u_0)\partial_x^3 u$ と書き換えられ, この項は時間に依存していないため線形項とみなすことができる. 次に共鳴部分における 5 次の非線形項を調べるが, $\Phi_5 = i\bigl(k_{1,2,3,4,5}^5 - \sum_{i=1}^{5}k_i^5\bigr)$ は

$$24+28+67+(-3)+(-54)=62,\quad 24^5+28^5+67^5+(-3)^5+(-54)^5=62^5$$

というような自明でない組を複数もつため因数分解することができないと思われる．一方で微分を回復するのが最も困難になるのは, $|k_j| \gg \max_{i\neq j}|k_i|$ であり, その他の場合は微分の損失が生じないことを注意する．この場合の共鳴部分は

$$\big\{(k_1, k_2 \cdots, k_5) \in \Gamma^{(5)}\ ;\ \Phi_5 = 0,\ |k_5| \gg \max_{1\le i\le 4}|k_i|\big\}$$

で表され, 次の集合に含まれることがわかる．

$$\Omega_{R2}^{(5)} := \big\{(k_1, k_2, \cdots, k_5) \in \Gamma^{(5)}\ ;\ k_{1,2,3,4} = 0,\ |k_5| \gg \max_{1\le i\le 4}|k_i|\big\}.$$

$\Omega_{R2}^{(5)}$ 上で 5 次の非線形項 $6\partial_x(u^5)$ は $30\int_{\mathbb{T}} u^4 dx \partial_x u$ となる．これと (2) の第 1 項をたし合わせると次が得られる．

$$10\int_{\mathbb{T}}(\partial_x u)^2 dx \partial_x u + 30\int_{\mathbb{T}} u^4 dx \partial_x u = 10E_2(u)\partial_x u + 20\int_{\mathbb{T}} u^4 dx \partial_x u \tag{3}$$

保存則 $E_2(u) = E_2(u_0)$ を用いると (3) の右辺第 1 項は $10E_2(u_0)\partial_x u$ となり線形項とみなすことができるが, 一方第 2 項は共鳴部分として残ってしまう．上述の議論から 2 つの保存量 E_1 と E_2 を用いることによって (1) を次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
&\partial_t u - \partial_x^5 u + 10E_1(u_0)\partial_x^3 u - \{10E_2(u_0) + 20E_1^2(u_0)\}\partial_x u\\
&= 30\big(u^4 - \int u^4 dx\big)\partial_x u\\
&+ 10\partial_x(u(\partial_x u)^2) - 10\int(\partial_x u)^2 dx \partial_x u - 10\partial_x^2(u^2\partial_x u) + 10\int u^2 dx \partial_x^3 u\\
&+ 20\Big\{\int u^4 dx - \Big(\int u^2 dx\Big)^2\Big\}\partial_x u.
\end{aligned}\tag{4}$$

この右辺第 1 項と第 2 項は非共鳴部分であるため normal form method を利用することができ, 微分の損失を回復できる．一方で右辺第 3 項は共鳴部分として残る．この項をどのように相殺させるかが本研究の最も難しい部分である．それを回避する手法の詳細は講演で述べることにして, ここでは簡単にアイデアのみ述べる．非共鳴部分の 3 次の非線形項である右辺第 2 項に normal form method を適用すると 5 次の項が現れる．その項の共鳴部分が問題となる右辺第 3 項と相殺する．このように上手く相殺される理由は, 5 次修正 KdV 方程式が対称性が高い方程式であるからである．上述のように非線形項の代数的構造を厳密に捉えることによって, Strichartz 評価や Fourier 制限法などを経由せず Sobolev の埋め込みという初等的な道具のみを用いるだけで次の主結果を証明できた．

定理. $s \ge 3/2$ のとき, 任意の $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$ に対して, (4) の解 $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ が一意に存在するような $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ が存在する．さらに解写像 $H^s(\mathbb{T}) \ni u_0 \mapsto u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}))$ は連続になる．

また保存量 E_1, E_2 および E_3 は正定値であるため, 容易に解の先験評価を導くことができ, エネルギー空間を含む $s \ge 2$ で大域的適切性を示せる．

なお, 本講演の内容は, 名古屋大学の津川光太郎氏との共同研究に基づくものである．

References

[1] J. Bourgain, *Fourier restriction phenomena for certain lattice subset applications to nonlinear evolution equation II*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), 209–262.

[2] S. Kwon, *Well-posedness and ill-posedness of the fifth order KdV equation*, Electron. J. Differential Equation **2008** no. 1, 15pp.

[3] S. Kwon and T. Oh, *On unconditional well-posedness of modified KdV*, Internat. Math. Res. Not. (2011).