Space-time L^2 estimates and the Glassey conjecture on global existence of small solutions to semilinear wave equations [1]

肥田野久二男（三重大学教育学部）

Chengbo Wang 氏（米国 Johns Hopkins 大学．2011 年 7 月より中国 Zhejiang 大学），横山和義氏（北海道工業大学）と共同で，非線形項が 1 階の導関数の絶対値のべき乗の形をもつ波動方程式（たとえば $\Box u = |u_t|^p$）の初期値問題の解の最大存在時間 (lifespan) の評価の研究を行なった [5].

1981 年に John は論文 [6] で，空間次元 n の値が 3 で p の値が 2 のときには，非自明な古典解は時間大域には存在しないことを示した．なぜこのようなことが起こるのか知るために，増田久弥教授 [7] や米国 Indiana 大学の Glassey 教授の門下生により，John の成果は直ちに n, p が他の値の場合への一般化が試みられた．Mathematical Reviews 誌において，Glassey は門下生の Sideris の論文 [10] を評する中で，$n \geq 2$ とするとき $1 < p \leq 1 + 2/(n-1)$ のときは，小さな初期値に対してすら非自明な解は時間大域には存在せず，他方 $p > 1 + 2/(n-1)$ のときは小さな初期値に対しては時間大域解の存在が示されるであろうと予想した．

$1 < p \leq 1 + 2/(n-1)$ のときの大域解の非存在に関しては，1980 年代中ごろにやはり Glassey の門下生の Schaeffer[9] と Rammaha[8] により優れた部分的な成果が得られて，その後の 2001 年に出版された Zhou[12] の論文で結果が完成された．この論文の中で Zhou は解の最大存在時間の**上から**の評価も得ており，その評価が最良であるかも問題になった.（ちなみに Zhou 氏がその論文でも述べているように，彼はこの傑作を 1992 年に書き終えていたそうで，しばらくして日本でもプレプリントが話題になりました．わたしが修士課程の大学院生の頃です.）

また $p > 1+2/(n-1)$ のときの小さな初期値に対する時間大域解の存在に関しては，n の値が 2 と 3 のときに限り、私と津田谷公利氏との共著論文 [1] と Tzvetkov 氏の論文 [11] の中で独立に解決されていた．

[1] 2012 年 7 月 21 日．「応用解析セミナー」（熊本大学）において．

以上のような展開をふまえて，本研究課題における長年の未解決問題は 2 以上のすべての n について

・$p > 1 + 2/(n-1)$ のときに，小さな初期値を与えて時間大域解の一意存在定理を確立することと，

・$1 < p \leq 1 + 2/(n-1)$ のときに，小さな初期値に対する時間局所解の最大存在時間の**下から**の評価を得て，Zhou による上からの評価の最適性を検証することの 2 点であった。

Wang 氏と横山氏と共同でこの問題の解決の取り組み、横山氏との共著論文 [2], [3] と Wang 氏，横山氏との共著論文 [4] のなかで培われた，Keel-Smith-Sogge 型評価式の改良版に基づく方法を駆使して，球対称な強解 ($H^2 \times H^1$ 級の解) の枠組みで上述の問題を解決することができた.

参考文献

[1] K. Hidano and K. Tsutaya, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for nonlinear wave equations*, Indiana Univ. Math. J., **44** (1995), 1273–1305.

[2] K. Hidano and K. Yokoyama, *A remark on the almost global existence theorems of Keel, Smith and Sogge*, Funkcial. Ekvac., **48** (2005), 1–34.

[3] K. Hidano and K. Yokoyama, *Space-time L^2-estimates and life span of the Klainerman-Machedon radial solutions to some semi-linear wave equations*, Differential Integral Equations, **19** (2006), 961–980.

[4] K. Hidano, C. Wang, and K. Yokoyama, *On almost global existence and local well posedness for some 3-D quasi-linear wave equations*, Adv. Differential Equations, **17** (2012), 267–306.

[5] K. Hidano, C. Wang, and K. Yokoyama, *The Glassey conjecture with radially symmetric data*, J. Math. Pures Appl. (9), **98** (2012), no. 3 (in press).

[6] F. John, *Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 29–51.

[7] K. Masuda, *Blow-up of solutions of quasilinear wave equations in two space dimensions*, *in* Recent topics in nonlinear PDE (Hiroshima, 1983), 87–91, North-Holland Math. Stud., **98**, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[8] M.A. Rammaha, *Finite-time blow-up for nonlinear wave equations in high dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **12** (1987), 677–700.

[9] J. Schaeffer, *Finite-time blow-up for* $u_{tt} - \Delta u = H(u_r, u_t)$, Comm. Partial Differential Equations, **11** (1986), 513–543.

[10] T.C. Sideris, *Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **8** (1983), 1291–1323.

[11] N. Tzvetkov, *Existence of global solutions to nonlinear massless Dirac system and wave equation with small data*, Tsukuba J. Math., **22** (1998), 193–211.

[12] Y. Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B, **22** (2001), 275–280.