反応拡散方程式系における厳密解とその応用

若狭　徹[1]
九州工業大学 大学院工学研究院

1　はじめに

与えられた微分方程式の解を具体的に求めることは, 常微分・偏微分を問わず微分方程式の最も基本的な問題であり, さらに級数解により定義されるさまざまな特殊関数は物理学や工学などの様々な場において用いられてきた.

しかし周知のように, こうした素朴な意味において微分方程式を解くことは容易とは限らない. 特に 20 世紀以降の解析学では, 関数空間を土台とする線形偏微分方程式の理論や力学系理論など, 解を抽象的, 定性的に取り扱う枠組みの構築が進み, 加えて 20 世紀後半にはコンピュータの発明発達により数値解析学が発展した. 発展方程式の研究方向自体が, 19 世紀以前と大きく変遷し, 特に非線形問題について解のダイナミクスを理解するというステージに関しては, 厳密解を調べる意義はこれらの新しい手法に取って代わられた, ように思われる.

その一方で, 方程式に特徴的な厳密解が得られた場合, 理論解析や数値シミュレーションにおいて依然として一定の役割を果たすことが期待される. また別の観点, 例えば方程式の対称性の観点などから, なお非線形偏微分方程式の厳密解について近年でも数多くの研究報告がなされている.

本講演では, 主に空間 1 次元の反応拡散方程式系のうち双安定型のものを取り上げ, 特にその定常問題について考察する. 取り扱う方程式は

- Allen-Cahn 方程式の線形化固有値問題
- 2 種 Lotka-Volterra 型競合拡散系の定常問題

の 2 つである. これらに関して, 厳密解として楕円関数を用いて表される解を与える.

最後に, 講演者の本来のモティベーションは空間 1 次元とは限らない場合における定常解の大域分岐問題や特異摂動問題にある. これらの問題について厳密解がどのように応用されるかについて合わせて述べたい.

2　2 種の Lotka-Volterra 型競争・拡散系

本節では $\varepsilon > 0$, $b, c > 0$ として, 同次 Neumann 境界条件に対する 2 種 Lotka-Volterra 系の定常問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx} + (1-u-bv)u = 0, \quad 0<x<1 \\ \varepsilon^2 v_{xx} + (1-cu-v)v = 0, \quad 0<x<1 \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \\ v_x(0) = v_x(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

[1]Email address: wakasa@mns.kyutech.ac.jp

を考察する．ここで b, c に関して強競合条件と呼ばれる場合のみ扱う:

$$b > 1, \quad c > 1.$$

この条件の下で，(2.1) は自明な平衡解 $(u, v) = (0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 以外に正値の共存平衡解

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{c-1}{bc-1}, \frac{b-1}{bc-1} \right)$$

を持つことが知られている．線形化安定性解析より共存解 (u^*, v^*) は不安定であり, ε が小さくなるにつれ, 非自明な定常解が分岐する．問題 (2.1) について, 一般的な非線形解析の枠組みでは Kanon [1] が条件 $b = c$ の下での大域的分岐構造を調べている．このとき, 非自明解からの 2 次分岐は起こらず, 定常解の大域分岐構造はよく知られたスカラー双安定型方程式の場合と同様となる．

厳密解の枠組みでは Rodrigo-Mimura [2] が, 2 種 Lotka-Volterra 系の進行波解についていくつかの厳密解を tanh 関数などを用いて与えている．定常問題 (2.1) については, $b = c = 5$ のときに限って分岐解が楕円関数の多項式解として書き表すことができることが示される．

Theorem 1. 問題 (2.1) において $b = c = 5$, $\varepsilon \in (0, 2/(\sqrt{6}\pi))$ とする． このとき次の $(u^{\pm}_{1,\varepsilon}(x), v^{\pm}_{1,\varepsilon}(x))$ は, $0 < x < 1$ 上で $(u^{+}_{1,\varepsilon})_x < 0$, $(v^{+}_{1,\varepsilon})_x > 0$, $((u^{-}_{1,\varepsilon})_x > 0$, $(v^{-}_{1,\varepsilon})_x < 0)$ を満たす (2.1) の正値定常解を与える:

$$\begin{aligned} u^{\pm}_{1,\varepsilon}(x) = & \ \frac{1}{2} + \frac{p_{0,\varepsilon} \pm p_{1,\varepsilon} w_\varepsilon(x) + p_{2,\varepsilon} w_\varepsilon(x)^2}{5k_\varepsilon^2 + 5 + \sqrt{k_\varepsilon^4 + 34k_\varepsilon^2 + 1}}, \\ v^{\pm}_{1,\varepsilon}(x) = & \ \frac{1}{2} + \frac{p_{0,\varepsilon} \mp p_{1,\varepsilon} w_\varepsilon(x) + p_{2,\varepsilon} w_\varepsilon(x)^2}{5k_\varepsilon^2 + 5 + \sqrt{k_\varepsilon^4 + 34k_\varepsilon^2 + 1}}, \end{aligned}$$

ただし, $k_\varepsilon \in (0, 1)$ は超越方程式

$$\sqrt{5k^2 + 5 + \sqrt{k^4 + 34k^2 + 1}}\, K(k) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad k \in (0, 1) \tag{2.2}$$

の一意解,

$$\begin{aligned} p_{0,\varepsilon} &= -2(1 + k_\varepsilon^2), \\ p_{1,\varepsilon} &= k_\varepsilon \sqrt{17(1 + k_\varepsilon^2) + 5\sqrt{k_\varepsilon^4 + 34k_\varepsilon^2 + 1}}, \\ p_{2,\varepsilon} &= 4k_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

$$w_\varepsilon(x) = \mathrm{sn}\left(2K(k_\varepsilon) \left(x + \frac{1}{2} \right), k_\varepsilon \right).$$

Theorem 1 より従う次の系により, (u^*, v^*) より分岐する全ての n モード定常解が楕円関数解として書き表されることがわかる.

Corollary 1. 関数 $(u^{\pm}_{1,\varepsilon}(x), v^{\pm}_{1,\varepsilon}(x))$ を Theorem 1 において与えられるものものとする．任意の $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon \in (0, 2/(\sqrt{6}n\pi))$ について

$$(u^{\pm}_{n,\varepsilon}(x), v^{\pm}_{n,\varepsilon}(x)) := (u^{\pm}_{1,n\varepsilon}(nx), v^{\pm}_{1,n\varepsilon}(nx))$$

とおくとき, これは $\varepsilon_n = 2/(\sqrt{6}n\pi)$ において (u^*, v^*) より分岐する (2.1) の分岐解の 1-パラメータ族を成す．さらに, $\varepsilon \in (2/(\sqrt{6}(m+1)\pi), 2/(\sqrt{6}m\pi))$ を満たすとき, (2.1) の任意の非定数定常解はちょうど $2m$ 個存在し, $(u^{\pm}_{n,\varepsilon}, v^{\pm}_{n,\varepsilon})$ $(n = 1, \ldots, m)$ により与えられる．

3 線形化固有値問題の固有関数

本節の内容は龍谷大学・四ツ谷晶二教授との共同研究に基づく ([3]-[4]). 単独 Allen-Cahn 方程式の定常問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0 & \text{in } (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

に付随する線形化固有値問題の固有関数の表示式, 並びに $\varepsilon \to 0$ としたときのその極限形状への応用について簡単に紹介する. ここでは $f(u) = u - u^3$ とする.

任意の $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon \in (0, 1/(n\pi))$ に対して, (3.1) の n モード解 $\pm u_{n,\varepsilon}(x)$ が存在することはよく知られており, これについても Jacobi の楕円関数を用いて書き表すことが可能である.

n モード定常解に対応する線形化固有値問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0 & \text{in } (0,1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

について $\lambda_j = \lambda_j^{n,\varepsilon}$, $\varphi_j(x) = \varphi_j^{n,\varepsilon}(x)$ を $(j+1)$ 番目の固有値, 固有関数とする ($j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$).

このとき以下の 2 つの定理によって全ての固有関数の表示式が得られることがわかる. その解法においては Appell の補題と呼ばれる 2 階線形常微分方程式の初等的性質を用いるが, そのプロセスで現れる 2 つの量が本質的となる.

$$\begin{aligned} H(u,\lambda;\alpha) &= \frac{1}{4}(\alpha^2 - u^2)(2 - \alpha^2 - u^2) + \frac{\lambda}{6}(u^2 - 2) + \frac{\lambda^2}{9} \\ &= \frac{1}{9}\Big(\lambda - \frac{3(2-\alpha^2)}{2}\Big)\Big(\lambda - \frac{3\alpha^2}{2}\Big) + \frac{1}{6}(\lambda - 3)u^2 + \frac{1}{4}u^4 \\ &= \frac{1}{12}\big(\lambda^2 - 2\lambda - 3(\alpha^2-1)^2\big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{3-\lambda}{3} - u^2\Big)^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\rho(\lambda;\alpha) = \frac{1}{2^4 \cdot 3^4}\lambda\Big(\lambda - \frac{3(2-\alpha^2)}{2}\Big)\Big(\lambda - \frac{3\alpha^2}{2}\Big)\big(\lambda^2 - 2\lambda - 3(\alpha^2-1)^2\big). \tag{3.4}$$

Theorem 2 ([3]). 線形化固有値問題 (3.2) は次の固有値, 固有関数を持つ:

(i) $\lambda_0^{n,\varepsilon} = 1 - \sqrt{1 + 3(1-\alpha_{n,\varepsilon}^2)^2}$, $\varphi_0^{n,\varepsilon}(x) = 1 - \dfrac{2 - \sqrt{1+3(1-\alpha_{n,\varepsilon}^2)^2}}{\alpha_{n,\varepsilon}^2(2-\alpha_{n,\varepsilon}^2)} u_{n,\varepsilon}(x)^2$,

(ii) $\lambda_n^{n,\varepsilon} = \dfrac{3}{2}\alpha_{n,\varepsilon}^2$, $\quad \varphi_n^{n,\varepsilon}(x) = \dfrac{2u_{n,\varepsilon}(x)}{\alpha_{n,\varepsilon}\sqrt{2-\alpha_{n,\varepsilon}^2}}\sqrt{2 - \alpha_{n,\varepsilon}^2 - u_{n,\varepsilon}(x)^2}$,

(iii) $\lambda_{2n}^{n,\varepsilon} = 1 + \sqrt{1 + 3(1-\alpha_{n,\varepsilon}^2)^2}$, $\varphi_{2n}^{n,\varepsilon}(x) = \dfrac{2 + \sqrt{1+3(1-\alpha_{n,\varepsilon}^2)^2}}{2\alpha_\varepsilon^2(2-\alpha_{n,\varepsilon}^2)} u_{n,\varepsilon}(x)^2 - \dfrac{1}{2}$,

ただし, $\alpha_{n,\varepsilon} = u_{n,\varepsilon}(0)$ とする.

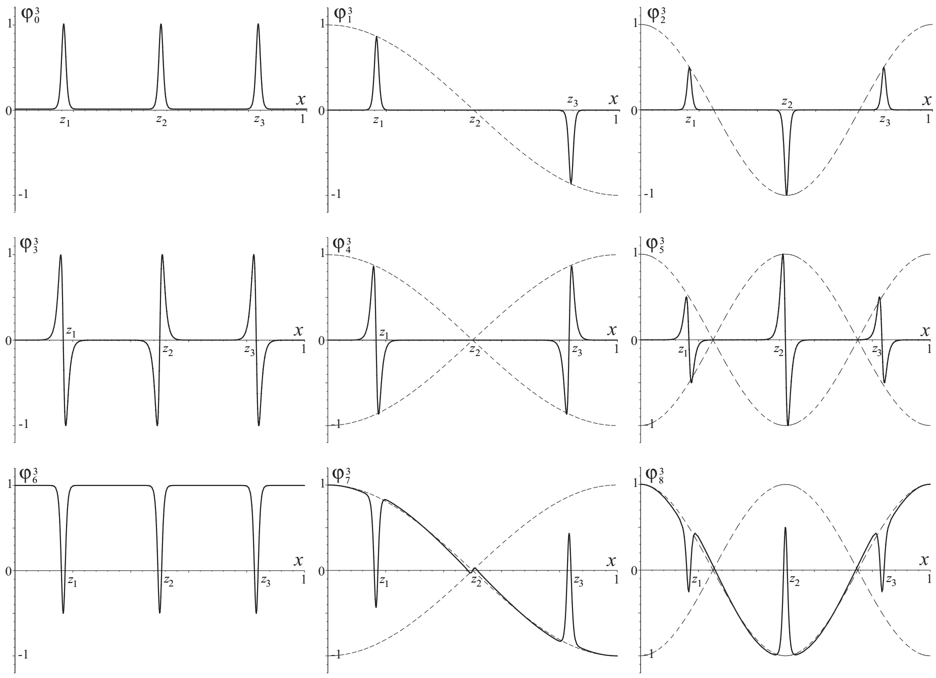

図 1: 3 モード解 $u_{3,\varepsilon}$ に対する (2) の固有関数 $\varphi_j^{3,\varepsilon}$ $(j = 0, \ldots, 8)$.

Theorem 3 ([4])**.** $j \neq 0, n, 2n$ とする. このとき線形化問題 (3.2) において, 固有値 $\lambda_j^{n,\varepsilon}$ に対する固有関数 $\varphi_{j,\varepsilon}^n$ は以下の表示式を持つ:

$$\varphi_{j,\varepsilon}^n(x) = \sqrt{|H(u_{n,\varepsilon}(x), \lambda_{j,\varepsilon}; \alpha_{n,\varepsilon})|} \cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\alpha_{n,\varepsilon}; \lambda_{j,\varepsilon}^n)}}{|H(u_{n,\varepsilon}(\xi), \lambda_{j,\varepsilon}; \alpha_{n,\varepsilon})|} d\xi\right).$$

ただし, $\alpha_{n,\varepsilon} = u_{n,\varepsilon}(0)$, H, ρ は (3.3), (3.4) により与えられる.

これらを応用することで固有関数の $\varepsilon \to 0$ における極限形状が得られる. 講演時には得られる一連の定理について紹介したい.

参考文献

[1] Y. Kanon, Bifurcation structure of stationary solutions of a Lotka-Volterra competition model with diffusion SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 424-436.

[2] M. Rodrigo and M. Mimura, Exact solutions of a competition-diffusion system, Hiroshima Math J., **30** (2000), 257–270.

[3] T. Wakasa, Exact eigenvalue and eigenfunction associated with linearization for Chafee-Infante problem, Funkcialaj Ekvacioj, **49** (2006), 321–336.

[4] T. Wakasa and S. Yotsutani, Limiting classifications on eigenfunctions for linearized problem of 1-dimensional Allen-Cahn equations, in preparation.