Wave packet transform and singularities of solutions to time dependent Schrödinger equations

加藤 圭一 (東京理科大学理学部) *

2012 年 3 月 10 日

1 序

この講演では, 次の時間に依存するシュレーディンガー方程式を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\triangle u - V(t,x)u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし、$i = \sqrt{-1}$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\triangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ であり， $V(t,x)$ は実数値関数とする．

考える問題は，次の通りである．

劣 2 次のポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式 (1) の解の特異性を初期値 u_0 の情報から決定すること

この問題は，既に [6] や [10] で扱われている．ここでは，A. Córdoba and C. Fefferman[1] によって定義された波束変換を用いて，この問題を考察する．[7] において，講演者たちは，既に，波束変換による自由シュレーディンガー方程式の解の表現を得ているが，その表示を用いて方程式 (1) を積分方程式に直し，時刻 t での解の特異性の情報を得る．

$V(t,x)$ に対して，次の仮定をおく．

仮定 1.1. $V(t,x)$ は $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ に属する実数値関数で，$\rho < 2$ が存在し，任意の多重指数 α に対して $C > 0$ があって

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \leq C(1+|x|)^{\rho-|\alpha|}$$

が任意の $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ について成立する．

*email: kato@ma.kagu.tus.ac.jp

本講演は，東京理科大学の小林政晴氏，伊藤真吾氏との共同研究に基づく．

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ および $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．φ からできる波束による f の波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を

$$W_\varphi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n$$

で定義する．

自由粒子のシュレーディンガー作用素を波束変換で表現すると

$$W_{\varphi(t)} u(t,x,\xi) = e^{-\frac{i}{2}t|\xi|^2} W_{\varphi_0} u_0(x-\xi t,\xi), \tag{2}$$

となる ([7])．ここで，$\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対し，$\varphi(t) = \varphi(t,x) = e^{i(t/2)\triangle}\varphi_0(x)$ とおいた．また，簡単のため，$W_{\varphi(t,\cdot)}(u(t,\cdot))(x,\xi)$ を，$W_{\varphi(t)}u(t,x,\xi)$ と書いている．

$\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\varphi^{(t)}(x) = e^{i(t/2)\triangle}\triangle\varphi_0(x)$ と書き，$\lambda \geq 1$ に対し，$\varphi_\lambda^{(t)}(x) = \varphi^{(\lambda t)}(\lambda^{1/2}x)$ とおく．$(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ に対し，K が x_0 の近傍で，Γ が ξ_0 の錐近傍 (すなわち，$\xi \in \Gamma$ かつ $\alpha > 0$ のとき，$\alpha\xi \in \Gamma$ を満たす．). $\mathbb{R}^{2n}$ の部分集合 $V = K \times \Gamma$ を (x_0,ξ_0) の錐近傍と呼ぶ．

$\lambda > 0$ と $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対し，$x(s;t,x,\lambda\xi)$ と $\xi(s;t,x,\lambda\xi)$ を常微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x}(s) & = \xi(s), \quad x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) & = -\nabla V(s,x(s)), \quad \xi(t) = \lambda\xi. \end{cases} \tag{3}$$

の解とする．

定理 1.2 (主結果)**.** $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とし，$u(t,x)$ を (1) の $C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する解とする．仮定 *1.1* の下で，$(x_0,\xi_0) \notin WF(u(t,x))$ であることの必要十分条件は，(x_0,ξ_0) の錐近傍 $V = K \times \Gamma$ が存在して，以下が成り立つことである：任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $a \geq 1$ に対し，ある定数 $C_{N,a} > 0$ があって，

$$|W_{\varphi_\lambda^{(-t)}} u_0(x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi))| \leq C_{N,a}\lambda^{-N}$$

が $\lambda \geq 1$, $a^{-1} \leq |\xi| \leq a (x,\xi) \in V$ に対して成立する．

注意 1.3. 谷島 ([13]) は，空間次元が 1 次元でポテンシャル $V(t,x)$ が優 2 次，すなわち，$V(x) \geq C|x|^\rho (\rho > 2)$ のとき，$t > 0$ において基本解は x に関し，いたるところ滑らかではないことを示している．

注意 1.4. [8] において，自由粒子および調和振動子のシュレーディンガー方程式の解の Wave front set を波束変換により調べている．

系 **1.5.** $\rho < 1$ ならば，$(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t,x))$ であることの必要十分条件は，(x_0, ξ_0) の錐近傍 $V = K \times \Gamma$ が存在して，任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $a \geq 1$ に対し，定数 $C_{N,a} > 0$ が存在し，

$$|W_{\varphi_\lambda^{(-t)}} u_0(x - \lambda t\xi, \lambda\xi)| \leq C_{N,a} \lambda^{-N}$$

が $\lambda \geq 1$, $a^{-1} \leq |\xi| \leq a$ と $(x, \xi) \in V$ に対し成立することである．

W. Craig, T. Kappeler と W. Strauss([2]) は平滑効果を微局所的に調べている．彼らは，一般の楕円型作用素に対するシュレーディンガー方程式を調べているが，自由粒子のときには述べると以下のようになる．$\mathbb{R}^n$ の点 $x_0 \neq 0$ と x_0 の錐近傍 Γ に対し，$\langle x\rangle^r u_0(x) \in L^2(\Gamma)$ をみたせば，x_0 のある錐近傍 Γ' に対し，$\langle\xi\rangle^r \hat{u}(t,\xi) \in L^2(\Gamma')$ が $t \neq 0$ のとき成立する．多くの数学者がこの方向の研究を行っている ([3], [4], [9], [11], [12]).

A. Hassell と J. Wunsch([6]) あるいは中村周 ([10]) は, 初期データにより，解の Wave front set を決定する問題を扱っている．Hassell と Wunsch は，“scattering wave front set” を用いて，特異性を取り扱っている．一方，中村は，準古典的に問題を取り扱っている．(1) の解 $u(t,x)$ に対し，$(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t))$ であることの必要十分条件は，$a(x_0, \xi_0) \neq 0$ をみたす $\mathbb{R}^{2n}$ 上の C_0^∞ 関数 $a(x,\xi)$ が存在して，$\|a(x + tD_x, hD_x)u_0\| = O(h^\infty)$ as $h \downarrow 0$. がなりたつことである．我々の結果では，擬微分作用素のかわりに，波束変換を用いている．

2 定理 1.2 の証明の概要

ここで用いる方法の概要は以下の通りである. (図も参照)

- 波束変換で用いる波束を時間に依存させてうまくとることにより，シュレーディンガー方程式のような時間一階空間 2 階の偏微分方程式 (空間次元 n) を空間次元 $2n$ の時空間で 1 階の偏微分方程式+低階項 (B) に変換する ((4) 式).
- (B) の解は，特性曲線の方法を用いて積分方程式に帰着することができる ((5) 式).
- 得られた積分方程式を評価することにより，以下で紹介する Folland による Wave front set の特徴付けを用いて，方程式 (A) の特異性を調べる．

$$\begin{tikzcd}
\text{空間 } n \text{ 次元 2 階偏微分方程式 (A)} \arrow[r, "W_{\varphi(t)}"] & \text{空間 } 2n \text{ 次元 1 階偏微分方程式 + 低階項 (B)} \arrow[d, "\text{解く}"] \\
\text{(B) の解を用いて (A) の解を調べる} & \text{(B) の解} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

定理1.2を示すため，Wave front set $WF(u)$ の定義と G. B. Folland([5]) による Wave front set の特徴付けを紹介する．

定義 2.1 (Wave front set)**.** $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し，$(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ であるとは，$a(x_0) \neq 0$ をみたす関数 $a(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ があって，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，ある定数 C_N が存在し，

$$|\widehat{af}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$$

がすべての $\xi \in \Gamma$ でみたされることである。

$\varphi(x)$ を，ある α に対し $\int x^\alpha \varphi(x)dx \neq 0$ をみたす $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の元とする．$0 < b < 1$ をみたす b に対し，$\varphi_\lambda(x) = \lambda^{nb/2}\varphi(\lambda^b x)$ とおく．

命題 2.2 (G. B. Folland [5, Theorem 3.22] および T. Ōkaji [11, Theorem2.2])**.** $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し，$(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ であることの必要十分条件は，x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ があって，任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $a \geq 1$ に対し，ある定数 $C_{N,a} > 0$ があり，以下を満たすことである：すべての $\lambda \geq 1$, すべての $x \in K$ および $a^{-1} \leq |\xi| \leq a$ をみたす全ての $\xi \in \Gamma$ に対し

$$|W_{\varphi_\lambda} f(x, \lambda\xi)| \leq C_{N,a}\lambda^{-N}.$$

注意 2.3. Folland [5] は，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ がゼロでない偶関数で $b = 1/2$ のとき，上の特徴付けを示している．大鍛冶 ([11]) は，$b = 1/2$ の場合に上の特徴付けを示している．Folland([5]) や大鍛冶 ([11]) は，$b = 1/2$ の場合のみ命題2.2 を示しているが，$0 < b < 1$ の場合に命題2.2 を示すのは容易である．

証明の概要 *1.2.* 初期値問題 (1) は，波束変換により, 以下の 1 階偏微分方程式に変換される：

$$\begin{cases} \left(i\partial_t + i\xi \cdot \nabla_x - i\nabla_x V(t,x) \cdot \nabla_\xi - \frac{1}{2}|\xi|^2 - \widetilde{V}(t,x)\right) \times \\ \qquad\qquad\qquad\qquad W_{\varphi(t)} u(t,x,\xi) = Ru(t,x,\xi), \\ W_{\varphi(0)} u(0,x,\xi) = W_{\varphi_0} u_0(x,\xi), \end{cases} \tag{4}$$

ただしここで，$\widetilde{V}(t,x) = V(t,x) - \nabla_x V(t,x) \cdot x$ であり，$V_{jk}(t,x,y) = \int_0^1 \partial_j \partial_k V(t, x + \theta(y-x))(1-\theta)d\theta$ として

$$Ru(t,x,\xi) = \sum_{j,k} \int \overline{\varphi(y-x)} V_{jk}(t,x,y)(y_j - x_j)(y_k - x_k)u(t,y)e^{-i\xi y}dy$$

とおいている．$x(s;t,x,\xi)$ および $\xi(s;t,x,\xi)$ を次の常微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x}(s) & = \xi(s),\ x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) & = -\nabla_x V(s,x(s)),\ \xi(t) = \xi. \end{cases}$$

の解とするとき，(4) を解くと，

$$\begin{aligned} W_{\varphi(t)}u(t,x,\xi) &= e^{-i\int_0^t\{\frac{1}{2}|\xi(s;t,x,\xi)|^2+\widetilde{V}(s,x(s;t,x,\xi))\}ds}W_{\varphi_0}u_0(x(0;t,x,\xi),\xi(0;t,x,\xi)) \\ &\quad - i\int_0^t e^{-i\int_s^t\{\frac{1}{2}|\xi(s_1;t,x,\xi)|^2+\widetilde{V}(s_1,x(s_1;t,x,\xi))\}ds_1}Ru(s,x(s;t,x,\xi),\xi(s;t,x,\xi))ds, \end{aligned} \tag{5}$$

を得る．

ここで，$(x(t;t_0,x,\lambda\xi),\xi(t;t_0,x,\lambda\xi))$ および $\varphi_\lambda^{(-t_0)}(x)$ を (x,ξ) および $\varphi_0(x)$ に代入すると

$$\begin{aligned} &W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}(t)}u(t,x(t;t_0,x,\lambda\xi),\xi(t;t_0,x,\lambda\xi)) \\ &\quad = e^{-i\int_0^t\{\frac{1}{2}|\xi(s;t_0,x,\lambda\xi)|^2+\widetilde{V}(s,x(s;t_0,x,\lambda\xi))\}ds}W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi)) \\ &\quad + i\int_0^t e^{-i\int_s^t\{\frac{1}{2}|\xi(s_1,t_0,x,\lambda\xi)|^2+\widetilde{V}(s_1,x(s_1;t_0,x,\lambda\xi))\}ds_1}Ru(s,x(s;t_0,x,\lambda\xi),\xi(s;t_0,x,\lambda\xi))ds \end{aligned} \tag{6}$$

を得る．

定理 1.2 を示すためには，$(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t,x))$ の仮定の下で，ある x_0 の近傍 K とある ξ_0 の錐近傍 Γ に対し，次の主張 $P(\sigma)=P(\sigma,\varphi_0,K,\Gamma)$ が全ての $\sigma\geq 0$ およびある α について $\int x^\alpha\varphi_0(x)dx\neq 0$ をみたすすべての $\varphi_0\in\mathcal{S}$ にたいして成立することを示せばよい．

$P(\sigma)=P(\sigma,\varphi_0,K,\Gamma)$：「ある定数 $C_{\delta,a}>0$ があって，すべての $x\in K$，$1/a\leq|\xi|\leq a$ をみたすすべての $\xi\in\Gamma$，すべての $\lambda\geq 1$ およびすべての $0\leq t\leq t_0$ に対し，

$$|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}(t)}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))|\leq C_{N,a}\lambda^{-\sigma}$$

が成立する．」

$b=\min((2-\rho)/2,1/2)$ とおく．$(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t,x))$ の下で以下を示す．

(1) ある α にたいし $\int x^\alpha\varphi_0(x)dx\neq 0$ をみたすすべての $\varphi_0\in\mathcal{S}$ について $P(0)$ が成立．

(2) $\sigma\geq 0$ に対し，$P(\sigma)$ の仮定の下で，ある α にたいし $\int x^\alpha\varphi_0(x)dx\neq 0$ をみたすすべての $\varphi_0\in\mathcal{S}$ について $P(\sigma+b)$ が成立する．

□

参考文献

[1] A. Córdoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Comm. Partial Differential Equations **3** (1978), 979–1005.

[2] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, *Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equations*, Commun. Pure and Appl. Math. **48** (1995), 760–860.

[3] S. Doi, *Smoothing effects for Schrödinger evolution equation and global behavior of geodesic flow*, Math. Ann. **318** (2000), 355–389.

[4] S. Doi, *Commutator algebra and abstract smoothing effect*, J. Funct. Anal. **168** (1999), 428–469.

[5] G. B. Folland, Harmonic analysis in phase space, Prinston Univ. Press, 1989.

[6] A. Hassell and J. Wunsch, *The Schrödinger propagator for scattering metrics* , Ann. of math. **182** (2005), 487–523.

[7] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, *Representation of Schrödinger operator of a free particle via short time Fourier transform and its applications*, to appear in Tohoku Math. Journal.

[8] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, *Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator*, preprint.

[9] S. Nakamura, *Propagation of the homogeneous wave front set for Schrödinger equations*, Duke Math. J., **126** (2003), 349–367.

[10] S. Nakamura, *Semiclassical singularities propagation property for Schrödinger equations*, J. Math. Soc. Japan, **61** (2009), 177–211.

[11] T. Ōkaji, *A note on the wave packet transforms*, Tsukuba J. Math. **25** (2001), 383–397.

[12] T. Ōkaji, *Propagation of wave packets and its applications.* Operator Theory: Advances and Appl. J. Math. **126** (2001), 239–243.

[13] K. Yajima, *Smoothness and nonsmoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **181** (1996), 605–629.