Low regularity solutions to the derivative nonlinear Schrödinger equation

高岡 秀夫（北海道大学理学研究院）

非線形項に微分を持つシュレディンガー方程式

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = i\partial_x(|u|^2 u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

を考える．この方程式は，非衝突プラズマ中を外部電場と平行に伝播する弱い磁気流体波（Alfvén 波）を表すモデル方程式である [9, 10]．方程式は，エネルギー

$$H(u) = \int |\partial_x u|^2 + \frac{3}{4}\mathrm{Im}\int \overline{u^2}\partial_x(u^2)\,dx + \frac{1}{2}\int |u|^6\,dx$$

を量とした Hamiltonian 系であり，さらに完全可積分系でもある [6, 8]．

本講演では，方程式の初期値問題を周期的境界条件の下で議論する．具体的には，$u = u(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ に対する次の初期値問題の適切性を，Gibbs 測度の構造と関連した関数空間において考える．

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = i\partial_x(|u|^2 u), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \phi(x) \in H^s(\mathbb{S}^1), \quad x \in \mathbb{S}^1, \tag{2}$$

ただし，$\mathbb{S}^1$ は単位円周を表す．

初期値問題の解の存在については，エネルギー法によって $s > 3/2$ のときが示され [11]，Fourier restriction norm 空間に縮小写像の原理を用いることによって $s \geq 1/2$ まで得られている [5]．エネルギーが正定値となる十分条件 $\|\phi\|_{L^2}^2 < 2\pi$ をみたせば，時間局所解の存在定理とエネルギー保存則の組み合わせからエネルギークラス $s = 1$ における時間大域解が存在し，それよりも広い関数空間としては Almost conservation laws（又は I-method）によって $s > 1/2$ まで存在証明が得られている [13]．一方，$s < 1/2$ の場合は，初期値問題はある意味で時間局所適切でないことが知られている．詳しくは，解写像

$$\phi \mapsto u; \quad H^s \to C([-T,T] : H^s)$$

に対する初期値の大きさと存在時間 T をパラメータとした一様連続が $s < 1/2$ の場合は成り立たないことが証明できる [5]．

1　結果

定理 1. $s > 4/9$ とする．初期値問題 (1), (2) の時間局所解 $u \in C([-T,T]; H^s)$ が存在する．また，初期値が以下の関数クラスに属しているなら解は一意であり，その関数クラスの上で解の初期値に対する連続依存性が成り立つ；

$$A^s = H^s \cap \{\phi \mid |\xi|^{1/2}\widehat{\phi}(\xi) \in \ell^\infty\}. \tag{3}$$

縮小写像における不動点の存在を用いた解の存在証明は，滑らかな解写像を与えるので，$s < 1/2$ における解の存在の証明に適用できない．

上の結果は，解の一意性，及び解の初期値に対する連続依存性について，フーリエ空間に重み制限を課している．$s < 1/2$ の場合，条件 A^s をみたす初期値として次を挙げる；

$$\phi(x) = \phi(x,\omega) = g_0(\omega) + \sum_{\xi \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{g_\xi(\omega)}{\xi} e^{ix\xi}, \tag{4}$$

ただし，$\{g_\xi\}_{\xi\in\mathbb{Z}}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に従う独立な正規分布の確率変数の族．(4) について，$\phi \in L^2(\Omega; H^s)$，$s < 1/2$ であるが，$\phi \notin L^2(\Omega; H^{1/2})$ となり [12]，さらに (3) の性質

$$|\xi|^{1/2}\widehat{\phi}(\xi,\omega) \in L^2(\Omega; \ell^\infty)$$

をみたす．

定理 2. $4/9 < s < 1/2$ とする．$\|\phi\|_{L^2}^2 < 2\pi$ の条件の下，殆ど至るところ $\omega \in \Omega$ に対して，初期値問題 (1), (4) の時間大域解 $u \in C(\mathbb{R}; A^s)$ が一意存在する．

形式 (4) の初期値について，非線形シュレディンガー方程式 [1, 3, 4]，modified-KdV 方程式 [1]，Zakharov 方程式 [2] の場合に議論されていた．方程式 (1) について，線形特性式は非線形シュレディンガー方程式の構造を持ち弱い振動効果しかせず，非線形相互作用は微分形を含む modified-KdV 方程式のため derivative loss の影響があり，議論の修正が必要となる．実際，[1, 2, 3, 4] では縮小写像による解の構成を柱建てとした考察がされているが，今回はそれが適用できない範囲，$s < 1/2$ である．

2　証明

関数変換（ゲージ変換）により変形された次の方程式を議論する；

$$i\partial_t w + \partial_x^2 w = iw^2\partial_x\overline{w} - \frac{1}{2}|w|^4 w + \frac{1}{2}\mu(w)|w|^2 w - \psi(w)w \tag{5}$$

ただし，$\mu(w) = \fint |w|^2\,dx = \mu(\phi)$, $\psi(w) = \fint 2\mathrm{Im}(w\partial_x\overline{w})\,dx - \fint \frac{1}{2}|w|^4\,dx + \mu(w)^2$.

定理 1 の証明の方針は次のとおり．

(i) $s < 1/2$ の場合，縮小写像の原理を用いた議論はできない．解の存在証明では，縮小写像を用いた証明を放棄し，代わりに $L^\infty([-T,T];H^s) \cap C([-T,T];H^{s/2+})$ の部分空間において，方程式 (5) の解に対するアプリオリ評価式を考える．

(ii) 解 w を低周波部分 w_L と高周波部分 w_H に分解すると，(i) から $w_L \in C([-T,T];H^s)$ が得られる．高周波部分については，エネルギーの非集約評価式を証明することによって，$w \in C([-T,T];H^s)$ が示せる．

定理 2 については，エネルギー E を重みとした形式的 Gibbs 測度 [7, 12]

$$d\rho(u) = Ce^{-E(u)} \prod_{x\in\mathbb{S}^1} du(x)$$

による解の評価式がアプリオリ評価となって時間大域解の存在を示すことができる．その証明方針は次のとおり．

(i) (5) の有限次元モデルと付随する Gibbs 測度を構成し，そのモデルに対して解の時間大域的アプリオリ評価を与える．

(ii) 有限次元モデルの解と (5) の解について，定理 1 の証明 (i) の下に摂動定理を導く．これにより，(5) に対する時間大域アプリオリ評価が得られる．

いずれの証明においても，非線形相互作用におけるエネルギー転換をフーリエ空間で評価することを必要とする．フーリエ空間で波数分解したとき，相互作用による振動と線形振動が非共鳴する場合は分散効果を取り入れ，より厳密な解の評価をすることが可能である．

References

[1] J. Bourgain, *Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures*, Commun. Math. Phys., 166 (1994), 1–26.

[2] J. Bourgain, *On the Cauchy and invariant measure problem for the periodic Zakharov system*, Duke Math. J., 76 (1994), 175–202.

[3] J. Bourgain, *Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation*, Commun. Math. Phys., 176 (1996), 421–445.

[4] J. Colliander and T. Oh, *Almost sure global solutions of the periodic cubic nonlinear Schrödinger equation below L^2*, preprint.

[5] S. Herr, *On the Cauchy problem for the derivative nonlinear Schödinger equation with periodic boundary condition*, Inter. Math. Res. Notices, Article ID 96763 (2006), 1–33.

[6] D. J. Kaup and A. C. Newewll, *An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys, 19 (1978), 789–801.

[7] J. Lebowitz, R. Rose and E. Speer, *Statical mechanics of the nonlinear Schrödinger equation*, J. Stat. Phys. V, 50 (1988), 657–687.

[8] E. H. Lee, *Global solvability of the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 314 (1989), 107–118.

[9] W. Mio, T. Ogino, K. Minami and S. Takeda, *Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfvèn waves propagating along the magnetic field in cold plasma*, J. Phys. Soc. Japan, 41 (1976), 265–271.

[10] E. Mjølhus, *On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field*, J. Plasma Phys., 16 (1976), 321–334.

[11] M. Tsutsumi and I. Fukuda, *On solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation: existence and uniqueness theorem*, Funkcialaj Ekvacioj, 23 (1980), 259–277.

[12] L. Thomann and N. Tzvetkov, *Gibbs measure for the periodic derivative nonlinear Schödinger equation* Nonlinearity, **23** (2010), 2771–2791.

[13] Yin Yin Su Win, *Global well-posedness of the derivative nonlinear Schrödinger equations on* $\mathbb{T}$, Funkcialaj Ekvaciloj, **53** (2010), 51–88.