双線形フーリエマルチプライヤーが有界作用素になるための滑らかさについて

冨田 直人 (大阪大学)

この講演では，双線形フーリエマルチプライヤーが有界作用素になるには，マルチプライヤーがどれくらいの滑らかさを持っていればよいのかを考えよう．

まずは線形の場合を思い出す．$m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，フーリエマルチプライヤー作用素 $m(D)$ は

$$m(D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} m(\xi) \widehat{f}(\xi)\, d\xi \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

により定義される．ここで，$\widehat{f}$ は f のフーリエ変換，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ はシュワルツの急減少関数空間を表す．線形のフーリエマルチプライヤーに関する基本的な結果として，つぎはよく知られている (例えば，[3, Corollary 8.11] 参照):

<u>Mihlin</u>　$1 < p < \infty$ とする．$m \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ が

(1) $$|\partial^\alpha m(\xi)| \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|} \qquad (|\alpha| \le [n/2]+1, \quad \xi \ne 0)$$

を満たしているとする．ここで，$[n/2]$ は $n/2$ の整数部分．このとき，$m(D)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上の有界作用素となる．

Mihlin の定理は，“次元の半分 + 1” までの微分評価 (1) があれば，フーリエマルチプライヤー作用素の L^p-有界性が保証されると言っている．

つぎに，双線形の場合を考えよう．$m \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に対し，双線形フーリエマルチプライヤー作用素 T_m は

$$T_m(f,g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot(\xi+\eta)} m(\xi,\eta) \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)\, d\xi d\eta \qquad (f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

により定義される．双線形フーリエマルチプライヤーの基本的な結果として, つぎはよく知られている:

<u>Coifman-Meyer ([1, 2])</u>　$1 < p, q, r < \infty$, $1/p + 1/q = 1/r$, N を十分大きな自然数とする．$m \in C^N(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\})$ が

(2) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi,\eta)| \le C_{\alpha,\beta}(|\xi|+|\eta|)^{-(|\alpha|+|\beta|)} \qquad (|\alpha|+|\beta| \le N, \quad (\xi,\eta) \ne (0,0))$$

を満たしているとする．このとき，T_m は $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ から $L^r(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素となる．つまり，ある定数 $C > 0$ が存在し

$$\|T_m(f,g)\|_{L^r} \le C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \qquad (f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

[2] の証明は，双線形の作用素を線形の Calderón-Zygmund 作用素に帰着させ，特異積分作用素論における $T1$ 定理に持ち込むというものである．この手法では，積分核が Calderón-Zygmund 核になることを保証するため，微分評価 (2) は (2n+1) 次まで必要である．一方，Grafakos-Torres [4] は，$T1$ 定理を線形から双線形の場合に拡張した．そしてその双線形 $T1$ 定理を用いて T_m の有界性を導くことができるが，その場合にもやはり積分核が双線形の意味での Calderón-Zygmund 核になることを保

証するため，$(2n+1)$ 次までの微分評価 (2) が必要である．また [1] は，paraproduct を用いる証明であるが，この証明には $(2n+1)$ 次よりもさらに多い微分評価 (2) が必要である．しかし線形の立場からは，$(2n+1)$ 次までの微分評価を用いるのは多すぎるように見える．実際，双線形の場合，“次元の半分 $+1$” を $[2n/2]+1=n+1$ と理解するのが自然と思われるからである．

この講演では，双線形の場合の Hörmander 型のマルチプライヤー定理を示し，その系として線形の場合から期待される “次元の半分 $+1$”, つまり $(n+1)$ 次までの微分評価 (2) があれば，双線形フーリエマルチプライヤー作用素の有界性が保証されることを報告したい．また多重線形の場合や，最近の宮地晶彦氏 (東京女子大学) との共同研究についても触れたい．

References

[1] R. Coifman and Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57 (1978), 1-185.

[2] R. Coifman and Y. Meyer, Wavelets: Calderón-Zygmund and Multilinear Operators, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[4] L. Grafakos and R. Torres, Multilinear Calderón-Zygmund theory, Adv in Math. 165 (2002), 124-164.