SPREADING AND EXTINCTION OF SOLUTIONS TO THE LOGARITHMIC DIFFUSION EQUATION WITH A LOGISTIC REACTION

下條昌彦
(東京都立大学)

放物型方程式の解が波動のように空間中を伝わる現象は，たとえば対立遺伝子が生物集団の間に世代交代により広がっていく様子を記述する Fisher-KPP 方程式 $\partial_t v = \partial_x^2 v + v(1-v)$ に見ることができる．まずこの方程式は進行波解の族をもつ．さらにコンパクト台をもつ初期値に対する解 $v(x,t)$ は，時間が十分経過すると，速度最小の進行波解とほぼ同じ速さで波のように広がり，常微分方程式 $V' = V(1-V)$ の安定な平衡解 1 に広義一様収束するからである ([4, 9])．一方，対数拡散方程式 $\partial_t w = \Delta(\log w)$ は 2 次元リッチ流 ([7])，プラズマ拡散現象 ([1])，ボルツマン方程式のカーレマンモデルに対する特異極限からも得られ，線形拡散モデルでは説明がつかない様々な現象が見つかっている ([8, 6])．

本講演では，直線上における単安定な反応項をもつ対数拡散方程式 ([5]):

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2(\log u) + u(1-u), & x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \partial_x(\log u) = \alpha, \quad \lim_{x\to+\infty} \partial_x(\log u) = -\beta, & t \geq 0 \end{cases}$$

の正値解の漸近挙動を解明する．ここで α, β は非負の定数である．この方程式には反応項が解を正則化し，拡散項が解の特異性を生み出すという数学的な構造がある．特異性を生み出す拡散項が反応項より相対的に弱いときには解が空間内を広がっていく．逆に，拡散項の方が相対的に強いと，解は有限時間で消滅する．そして，拡散項と反応項が釣り合うときには，フロントやパルスの時空パターンが生み出される．我々が紹介する主結果は以下の 2 つである．

(1) フロント型の進行波解の局所漸近安定性 ([2])．
(2) 遠方で指数減衰する任意の正値解の振る舞いのパルス型進行波の観点からの完全分類，およびそれらの正値解の漸近挙動の詳細な記述 ([3])．

References

[1] K. E. Longman and A. Hirose, Expansion of an electron cloud, Phys. Lett. A **59** (1976), 285–286.
[2] H. Matsuzawa, H. Monobe, M. Shimojo and E. Yanagida, Convergence to a traveling wave in the logarithmic diffusion equation with a bistable nonlinearity, Indiana Univ. Math., To appear.
[3] H. Monobe, M. Shimojo and E. Yanagida, Spreading and extinction of solutions to the logarithmic diffusion equation with a logistic reaction, Submitted.
[4] 二宮 広和，侵入・伝播と拡散方程式 (シリーズ・現象を解明する数学), 共立出版 (2014).
[5] P. Rosenau, On reaction processes with a logarithmic-diffusion, Physics Letters A **381** (2017), 94–101.
[6] M. Shimojo, P. Takáč and E. Yanagida, Asymptotic behavior of solutions to the logarithmic diffusion equation with a linear source, Math. Ann. **372** (2018), 429–449.
[7] 鈴木 貴，大塚 浩史，楕円型方程式と近平衡力学系〈下〉自己組織化のポテンシャル，朝倉数学大系 (2015).
[8] J. L. Vázquez, The mathematical theories of diffusion–Nonlinear and fractional diffusion, Lecture Notes in Mathematics **2186**, CIME Foundation Subseries (2017), 205–278.
[9] 柳田英二，反応拡散方程式，東京大学出版会 (2015).

本研究は JSPS 科研費 (課題番号:16K17634,20K03708) の助成を受けたものである．