Instability of degenerate solitons for the nonlinear Schrödinger equation with derivative

林　雅行　(京都大学・数理研)*

次のような非線型項に微分項を含む非線型シュレディンガー方程式を考える．

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + i|u|^2\partial_x u + b|u|^4 u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

$b = 0$ のときはよく知られた微分型非線形シュレディンガー方程式（微分型 NLS）とゲージ同値な方程式であり，可積分構造をもつことが知られている ([3])．付加項 $b|u|^4u$ は微分型 NLS のソリトンの輪郭 (profile) を変えない摂動として自然なもので，方程式のスケール構造を保っている．付加項が集約的 ($b > 0$) であるとき，ソリトン全体の中で安定／不安定の境界に位置する退化したソリトンが現れ，初期値がこのソリトンの質量よりも小さいという質量条件を満たすならば，対応する解は時間大域的に存在することが知られている ([2])．微分型 NLS では退化したソリトンが代数ソリトンに対応し，質量条件が 4π の条件 ([4]) に対応している．ここで現れる退化したソリトンは一般論の枠組みでは安定性／不安定性が決定できない場合に相当している．

本講演ではソリトン周りの線形化作用素のスペクトルを整理し，modulation 解析と local Virial 等式を組み合わせて，付加項が集約的であるときの退化したソリトンの定量的な不安定性を証明する．証明の大部分が微分型 NLS の代数ソリトンに関しても適用でき，このことは微分型 NLS の代数ソリトン周りのダイナミクス解明に向けて重要な指針になると期待される．時間が許せば最近の可積分系の方面からの微分型 NLS の研究と今回の不安定性の結果との関連性について考察し，未解決問題についても触れたい．なお本講演は深谷法良氏（東京理科大学）との共同研究 ([1]) に基づくものである．

参考文献

[1] N. Fukaya, M. Hayashi, preprint [arXiv:2102.13014].
[2] M. Hayashi, Anal. PDE **14** (2021), 909–944.
[3] D. J. Kaup, A. C. Newell, J. Math. Phys. **9** (1978), 789–801.
[4] Y. Wu, Anal. PDE **8** (2015), 1101–1112.

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所
e-mail: `hayashi@kurims.kyoto-u.ac.jp`